ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

VII

Л.Д. ЛАНДАУ
Е.М. ЛИФШИЦ

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Л. Д. ЛАНДАУ и Е. М. ЛИФШИЦ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В десяти томах

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ

Л. Д. ЛАНДАУ и Е. М. ЛИФШИЦ

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

МОСКВА

УДК 530.1(075.8)
Л22
ББК 22.31

Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. **Теоретическая физика**: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. VII. **Теория упругости**. — 5-е изд., стереот. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 264 с. — ISBN 5-9221-0122-6 (Т. VII).

Теория упругости излагается как часть теоретической физики. Наряду с традиционными вопросами рассматриваются макроскопическая теория теплопроводности и вязкости твердых тел, ряд вопросов теории упругих колебаний и волн, теория дислокаций. В четвертом издании добавлена специальная глава о механике жидких кристаллов, объединяющая в себе черты, свойственные как жидкостям, так и упругим средам.

Для студентов университетов, студентов физических специальностей вузов, а также для аспирантов соответствующих специальностей.

Ответственный редактор курса «Теоретическая физика» академик РАН, доктор физико-математических наук *Л. П. П и т а е в с к и й*

ISBN 5-9221-0122-6 (Т. VII)
ISBN 5-9221-0053-X

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

Основное содержание этой книги (главы 1–III, V) мало изменилось по сравнению с тем, каким оно было написано для первых двух изданий (1944, 1953 гг.), в которых теория упругости была, по случайным причинам, объединена с гидродинамикой в виде «Механики сплошных сред». Такое постоянство — естественное следствие того, что основные уравнения и результаты теории упругости уже давно «устоялись».

В третьем издании (1965 г.) была добавлена глава о теории дислокаций в кристаллах (написанная совместно с А.М. Косевичем); эта глава подверглась теперь лишь сравнительно небольшим изменениям.

В настоящем издании добавлена новая глава, посвященная механике жидких кристаллов; она написана совместно с Л.П. Питаевским. Эта новая область механики сплошных сред несет в себе одновременно черты, свойственные механикам жидких и упругих сред. Поэтому представляется целесообразным в данном курсе расположить ее после изложения как гидродинамики, так и теории упругости твердых тел.

Как всегда, я извлек много пользы из обсуждения ряда затронутых в этой книге вопросов со своими друзьями и товарищами по работе. В этой связи я хотел бы с благодарностью упомянуть Г.Е. Воловика, В.Л. Гинзбурга, В.Л. Инденбома, Е.И. Каца, Ю.А. Косевича, В.В. Лебедева и В.П. Минеева, сделавших ряд полезных замечаний, учтенных в работе над книгой.

Институт физических проблем АН СССР *Е.М. Лифшиц*
Январь 1985 г.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К «МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД»

... В книге, написанной физиками и в первую очередь для физиков, нас, естественно, интересовали вопросы, которые обычно не излагаются в курсах теории упругости; таковы, например, вопросы теплопроводности и вязкости твердых тел, ряд вопросов теории упругих колебаний и волн. В то же время мы лишь очень кратко касаемся ряда специальных проблем (например, сложных математических методов теории упругости, теории оболочек и т. п.), в которых к тому же авторы ни в какой степени не являются специалистами.

1953 г. *Л. Ландау, Е. Лифшиц*

НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Плотность вещества ρ

Вектор смещения $\mathbf{u}$

Тензор деформации $u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$

Тензор напряжений σ_{ik}

Модуль всестороннего сжатия K

Модуль сдвига μ

Модуль растяжения (модуль Юнга) E

Коэффициент Пуассона σ

Продольная и поперечная скорости звука c_l и c_t (выражения для них через K, μ или E, σ — см. с. 131)

Величины K, μ и E, σ связаны формулами

$$E = \frac{9K\mu}{3K+\mu}, \quad \sigma = \frac{3K-2\mu}{2(3K+\mu)},$$
$$K = \frac{E}{3(1-2\sigma)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}.$$

По всей книге принято обычное правило суммирования по векторным и тензорным индексам: по всем дважды повторяющимся в данном выражении («немым») индексам подразумевается суммирование по значениям 1, 2, 3.

В главе VI используется обозначение $\partial_i = \partial/\partial x_i$ для оператора дифференцирования по координатам.

Ссылки на номера параграфов и формул в других томах этого курса снабжены римскими цифрами: II — том II, «Теория поля», 1989; V — том V, «Статистическая физика, часть 1», 1995; VI — том VI, «Гидродинамика», 1988; VIII — том VIII, «Электродинамика сплошных сред», 1982.

Г Л А В А I

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 1. Тензор деформации

Механика твердых тел, рассматриваемых как сплошные среды, составляет содержание *теории упругости* [1]).

Под влиянием приложенных сил твердые тела в той или иной степени деформируются, т. е. меняют свою форму и объем. Для математического описания деформации тела поступают следующим образом. Положение каждой точки тела определяется ее радиус-вектором $\mathbf{r}$ (с компонентами $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$) в некоторой системе координат. При деформировании тела все его точки, вообще говоря, смещаются. Рассмотрим какую-нибудь определенную точку тела; если ее радиус-вектор до деформирования был $\mathbf{r}$, то в деформированном теле он будет иметь некоторое другое значение $\mathbf{r}'$ (с компонентами x'_i). Смещение точки тела при деформировании изобразится тогда вектором $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$, который мы обозначим буквой $\mathbf{u}$:

$$u_i = x'_i - x_i. \tag{1.1}$$

Вектор $\mathbf{u}$ называют *вектором деформации* (или *вектором смещения*). Координаты x'_i смещенной точки являются, конечно, функциями от координат x_i той же точки до ее смещения. Поэтому и вектор деформации является функцией координат x_i. Задание вектора $\mathbf{u}$ как функции от x_i полностью определяет деформацию тела.

При деформировании тела меняются расстояния между его точками. Рассмотрим какие-нибудь две бесконечно близкие точки. Если радиус-вектор между ними до деформирования был dx_i, то в деформированном теле радиус-вектор между теми же двумя точками будет $dx'_i = dx_i + du_i$. Само расстояние между точками до деформирования было равно

$$dl = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2},$$

а после деформирования

$$dl' = \sqrt{dx'^2_1 + dx'^2_2 + dx'^2_3}.$$

[1]) Основные уравнения теории упругости были установлены *Коши* и *Пуассоном* в 20-х годах XIX века.

Согласно общему правилу написания сумм имеем

$$dl^2 = dx_i^2,\ dl'^2 = dx_i'^2 = (dx_i + du_i)^2.$$

Так как $du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k$, то перепишем dl'^2 в виде

$$dl'^2 = dl^2 + 2\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\, dx_i\, dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\, dx_k\, dx_l.$$

Поскольку во втором члене оба индекса i и k являются немыми, их можно переставить и соответственно записать этот член в явно симметричном виде

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) dx_i dx_k.$$

В третьем же члене поменяем местами индексы i и l. Тогда окончательно получаем

$$dl'^2 = dl^2 + 2u_{ik}\, dx_i\, dx_k, \tag{1.2}$$

где

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right). \tag{1.3}$$

Этими выражениями определяется изменение элемента длины при деформировании тела. Тензор u_{ik} называют *тензором деформации*; по своему определению он симметричен:

$$u_{ik} = u_{ki}. \tag{1.4}$$

Как и всякий симметричный тензор, можно привести тензор u_{ik} в каждой данной точке к главным осям. Это значит, что в каждой данной точке можно выбрать такую систему координат — главные оси тензора, — в которой из всех компонент u_{ik} отличны от нуля только диагональные компоненты u_{11}, u_{22}, u_{33}. Эти компоненты — главные значения тензора деформации — обозначим через $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$. Надо, конечно, помнить, что если тензор u_{ik} приведен к главным осям в некоторой точке тела, то он, вообще говоря, недиагонален во всех других точках.

Если тензор деформации приведен в данной точке к главным осям, то в окружающем ее элементе объема элемент длины (1.2) приобретает вид

$$dl'^2 = (\delta_{ik} + 2u_{ik})\, dx_i\, dx_k = \\ = (1 + 2u^{(1)})\, dx_1^2 + (1 + 2u^{(2)})\, dx_2^2 + (1 + 2u^{(3)})\, dx_3^2.$$

Мы видим, что это выражение распадается на три независимых члена. Это значит, что в каждом элементе объема тела деформацию можно рассматривать как совокупность трех независимых

деформаций по трем взаимно перпендикулярным направлениям — главным осям тензора деформации. Каждая из этих деформаций представляет собой простое растяжение (или сжатие) вдоль соответствующего направления: длина dx_1 вдоль первой из главных осей превращается в длину

$$dx_1' = \sqrt{1 + 2u^{(1)}}dx_1$$

и аналогично для двух других осей. Величины

$$\sqrt{1 + 2u^{(i)}} - 1$$

представляют собой, следовательно, относительные удлинения $(dx_i' - dx_i)/dx_i$ вдоль этих осей.

Практически почти во всех случаях деформирования тел деформации оказываются малыми. Это значит, что изменение любого расстояния в теле оказывается малым по сравнению с самим расстоянием. Другими словами, относительные удлинения малы по сравнению с единицей. Ниже мы будем рассматривать все деформации как малые.

Если тело подвергается малой деформации, то все компоненты тензора деформации, определяющего, как мы видели, относительные изменения длин в теле, являются малыми. Что же касается вектора деформации, то он может быть в некоторых случаях большим даже при малых деформациях. Рассмотрим, например, длинный тонкий стержень. Даже при сильном изгибе, когда его концы значительно переместятся в пространстве, растяжения и сжатия внутри самого стержня будут незначительными.

За исключением таких особых случаев [1]), при малых деформациях является малым также и вектор деформации. Действительно, никакое «трехмерное» тело (т. е. тело, размеры которого не специально малы ни в каком направлении) не может быть, очевидно, деформировано так, чтобы отдельные его части сильно переместились в пространстве, без возникновения в теле сильных растяжений и сжатий.

Тонкие стержни будут нами рассмотрены отдельно в гл. II. В остальных же случаях, следовательно, при малых деформациях смещения u_i , а с ними и их производные по координатам, малы. Поэтому в общем выражении (1.3) можно пренебречь последним членом как малой величиной второго порядка. Таким образом, в случае малых деформаций тензор деформации определяется выражением

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right). \tag{1.5}$$

[1]) Кроме деформаций тонких стержней сюда относятся изгибы тонких пластинок в цилиндрическую поверхность. Следует исключить также случай, когда «трехмерное» тело наряду с деформацией поворачивается как целое вокруг некоторой оси на конечный угол.

Относительные удлинения элементов длины вдоль направлений главных осей тензора деформации (в данной точке) равны теперь с точностью до величин высших порядков

$$\sqrt{1+2u^{(i)}}-1 \approx u^{(i)},$$

т. е. непосредственно главным значениям тензора u_{ik}.

Рассмотрим какой-нибудь бесконечно малый элемент объема dV и определим его величину dV' после деформирования тела. Для этого выберем в качестве осей координат главные оси тензора деформации в рассматриваемой точке. Тогда элементы длины dx_1, dx_2, dx_3 вдоль этих осей после деформирования перейдут в $dx'_1 = (1+u^{(1)})dx_1$ и т. д. Объем dV есть произведение $dx_1dx_2dx_3$, объем же dV' равен $dx'_1dx'_2dx'_3$. Таким образом,

$$dV' = dV(1+u^{(1)})(1+u^{(2)})(1+u^{(3)}).$$

Пренебрегая величинами высших порядков малости, находим отсюда

$$dV' = dV(1+u^{(1)}+u^{(2)}+u^{(3)}).$$

Но сумма $u^{(1)}+u^{(2)}+u^{(3)}$ главных значений тензора есть, как известно, его инвариант и равна в любой системе координат сумме диагональных компонент $u_{ii} = u_{11}+u_{22}+u_{33}$.

Таким образом,

$$dV' = dV(1+u_{ii}). \tag{1.6}$$

Мы видим, что сумма диагональных компонент тензора деформации дает относительное изменение объема $(dV'-dV)/dV$.

Часто бывает удобным пользоваться компонентами тензора деформации не в декартовых, а в сферических или цилиндрических координатах. Приведем здесь для справок соответствующие формулы, выражающие эти компоненты через производные от компонент вектора смещения в тех же координатах. В сферических координатах r, θ, φ имеем

$$\begin{gathered}
u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r},\\
u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r}\operatorname{ctg}\theta + \frac{u_r}{r},\\
2u_{\theta\varphi} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \operatorname{ctg}\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi},\\
2u_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta},\\
2u_{\varphi r} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}.
\end{gathered} \tag{1.7}$$

В цилиндрических координатах r, φ, z

$$u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, \quad u_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$
$$2u_{\varphi z} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}, \quad 2u_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}, \tag{1.8}$$
$$2u_{r\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}.$$

§ 2. Тензор напряжений

В недеформированном теле расположение молекул соответствует состоянию его теплового равновесия. При этом все его части находятся друг с другом и в механическом равновесии. Это значит, что если выделить внутри тела какой-нибудь объем, то равнодействующая всех сил, действующих на этот объем со стороны других частей, равна нулю.

При деформировании же расположение молекул меняется и тело выводится из состояния равновесия, в котором оно находилось первоначально. В результате в нем возникают силы, стремящиеся вернуть тело в состояние равновесия. Эти возникающие при деформировании внутренние силы называются *внутренними напряжениями*. Если тело не деформировано, то внутренние напряжения в нем отсутствуют.

Внутренние напряжения обусловливаются молекулярными силами, т. е. силами взаимодействия молекул тела друг с другом. Весьма существенным для теории упругости является то обстоятельство, что молекулярные силы обладают очень незначительным радиусом действия. Их влияние простирается вокруг создающей их частицы лишь на расстояниях порядка межмолекулярных. Но в теории упругости, как в макроскопической теории, рассматриваются только расстояния, большие по сравнению с межмолекулярными. Поэтому «радиус действия» молекулярных сил в теории упругости должен считаться равным нулю. Можно сказать, что силы, обусловливающие внутренние напряжения, являются в теории упругости силами «близкодействующими», передающимися от каждой точки только к ближайшим с нею. Отсюда следует, что силы, действующие на какую-нибудь часть тела со стороны окружающих ее частей, проявляют это действие только непосредственно через поверхность этой части тела.

Здесь необходима следующая оговорка: сделанное утверждение несправедливо в тех случаях, когда деформирование тела сопровождается появлением в нем макроскопических электрических полей; такие (так называемые пиро- и пьезоэлектрические) тела рассматриваются в т. VIII этого курса.

Выделим в теле какой-нибудь объем и рассмотрим действующую на него суммарную силу. С одной стороны, эта суммарная сила может быть представлена в виде объемного интеграла

$$\int \mathbf{F}\,dV,$$

где $\mathbf{F}$ — сила, действующая на единицу объема тела. С другой стороны, силы, с которыми действуют друг на друга различные части самого рассматриваемого объема, не могут привести к появлению отличной от нуля суммарной равнодействующей силы, поскольку они в силу закона равенства действия и противодействия в сумме уничтожают друг друга. Поэтому искомую полную силу можно рассматривать как сумму только тех сил, которые действуют на данный объем со стороны окружающих его частей тела. Но, согласно сказанному выше, эти силы действуют на рассматриваемый объем через его поверхность, и потому результирующая сила может быть представлена в виде суммы сил, действующих на каждый элемент поверхности объема, т. е. в виде некоторого интеграла по этой поверхности.

Таким образом, для любого объема тела каждая из трех компонент $\int F_i\,dV$ равнодействующей всех внутренних напряжений может быть преобразована в интеграл по поверхности этого объема. Как известно из векторного анализа, интеграл от скаляра по произвольному объему может быть преобразован в интеграл по поверхности в том случае, если этот скаляр является дивергенцией некоторого вектора. В данном случае мы имеем дело с интегралом не от скаляра, а от вектора. Поэтому вектор F_i должен являться дивергенцией некоторого тензора второго ранга, т. е. иметь вид [1])

$$F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \tag{2.1}$$

Тогда сила, действующая на некоторый объем, может быть написана в виде интеграла по замкнутой поверхности, охватывающей этот объем [2]):

$$\int F_i\,dV = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}\,dV = \oint \sigma_{ik}\,df_k. \tag{2.2}$$

[1]) Вектор $d\mathbf{f}$ элемента площади направлен по нормали, внешней по отношению к охватываемому поверхностью объему. Интеграл по замкнутой поверхности преобразуется в интеграл по объему путем замены df_i оператором $dV \cdot \partial/\partial x_i$.

[2]) Строго говоря, при определении полной силы, действующей на деформированный объем тела, интегрирование должно производиться не по старым координатам x_i, а по координатам x'_i точек деформированного тела. Соответственно этому и производные (2.1) должны были бы браться по x'_k. Но ввиду малости деформации производные по x_k и по x'_k отличаются друг от друга на величины высших порядков малости, и потому можно все дифференцирования производить по координатам x_k.

Тензор σ_{ik} называют *тензором напряжений*. Как видно из (2.2), $\sigma_{ik}df_k$ есть i-я компонента силы, действующей на элемент поверхности $d\mathbf{f}$. Выбирая элементы поверхности в плоскостях xy; yz; xz, находим, что компонента σ_{ik} тензора напряжений есть i-я компонента силы, действующей на единицу поверхности, перпендикулярную к оси x_k. Так, на единичную площадку, перпендикулярную к оси x, действуют нормальная к ней (направленная вдоль оси x) сила σ_{xx} и тангенциальные (направленные по осям y и z) силы σ_{yx} и σ_{zx}.

Необходимо сделать здесь следующее замечание по поводу знака силы $\sigma_{ik}df_k$. В (2.2) интеграл по поверхности представляет собой силу, действующую на ограниченный этой поверхностью объем со стороны окружающих частей тела. Наоборот, сила, с которой этот объем действует сам на окружающую его поверхность, имеет обратный знак. Поэтому, например, сила, действующая со стороны внутренних напряжений на всю поверхность тела, есть

$$-\oint \sigma_{ik}\,df_k,$$

где интеграл берется по поверхности тела, а $d\mathbf{f}$ направлен по внешней нормали.

Определим момент сил, действующих на некоторый объем тела. Момент силы $\mathbf{F}$ можно, как известно, написать в виде антисимметричного тензора второго ранга с компонентами $F_i x_k - F_k x_i$, где x_i — координаты точки приложения силы [1]). Поэтому момент сил, действующих на элемент объема dV, есть $(F_i x_k - F_k x_i)\,dV$, а на весь объем действует момент сил

$$M_{ik} = \int (F_i x_k - F_k x_i)\,dV.$$

Как и полная сила, действующая на любой объем, момент этих сил тоже должен выражаться в виде интеграла по поверхности объема. Подставляя для F_i выражение (2.1), находим

$$M_{ik} = \int \left(\frac{\partial\sigma_{il}}{\partial x_l}x_k - \frac{\partial\sigma_{kl}}{\partial x_l}x_i\right)dV = \\ = \int \frac{\partial(\sigma_{il}x_k - \sigma_{kl}x_i)}{\partial x_l}\,dV - \int \left(\sigma_{il}\frac{\partial x_k}{\partial x_l} - \sigma_{kl}\frac{\partial x_i}{\partial x_l}\right)dV.$$

Замечаем, что во втором члене производные $\partial x_k/\partial x_l$ составляют единичный тензор δ_{kl}. В первом же члене под интегралом стоит дивергенция некоторого тензора; этот интеграл преобразуется в интеграл по поверхности. В результате находим

$$M_{ik} = \oint (\sigma_{il}x_k - \sigma_{kl}x_i)\,df_l + \int (\sigma_{ki} - \sigma_{ik})\,dV. \tag{2.3}$$

---

[1]) Момент силы $\mathbf{F}$ определяется как векторное произведение $[\mathbf{Fr}]$. Компоненты векторного произведения двух векторов составляют антисимметричный тензор второго ранга, компоненты которого написаны в тексте.

Тензор M_{ik} будет выражен в виде интеграла только по поверхности, если тензор напряжений симметричен,

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}, \tag{2.4}$$

так что объемный интеграл исчезает (к обоснованию важного утверждения (2.4) мы вернемся еще в конце параграфа). Момент сил, действующих на некоторый объем тела, представится тогда в простом виде:

$$M_{ik} = \int (F_i x_k - F_k x_i)\, dV = \oint (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i)\, df_l. \tag{2.5}$$

Легко написать тензор напряжений в случае равномерного *всестороннего сжатия* тела. При таком сжатии на каждую единицу поверхности тела действует одинаковое по величине давление, направленное везде по нормали к поверхности внутрь объема тела. Если обозначить это давление буквой p, то на элемент поверхности df_i действует сила $-p\, df_i$. С другой стороны, эта сила, будучи выражена через тензор напряжений, должна иметь вид $\sigma_{ik} df_k$. Написав $-p\, df_i$ в виде $-p\delta_{ik} df_k$, мы видим, что тензор напряжений при равномерном всестороннем сжатии выглядит следующим образом:

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}. \tag{2.6}$$

Все отличные от нуля его компоненты равны просто давлению.

В общем случае произвольной деформации отличны от нуля также и недиагональные компоненты тензора напряжений. Это значит, что на каждый элемент поверхности внутри тела действует не только нормальная к нему сила, но также и тангенциальные, *скалывающие*, напряжения, стремящиеся сдвинуть параллельные элементы поверхности друг относительно друга.

В равновесии силы внутренних напряжений должны взаимно компенсироваться в каждом элементе объеме тела, т. е. должно быть $F_i = 0$. Таким образом, уравнения равновесия деформированного тела имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0. \tag{2.7}$$

Если тело находится в поле тяжести, то должна исчезать сумма $\mathbf{F} + \rho\,\mathbf{g}$ сил внутренних напряжений и силы тяжести $\rho\,\mathbf{g}$, действующей на единицу объема тела (ρ — плотность [1]), $\mathbf{g}$ — вектор ускорения свободного падения, направленный вертикально вниз); уравнения равновесия в этом случае имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i = 0. \tag{2.8}$$

[1]) Строго говоря, плотность тела при его деформировании меняется. Учет этого изменения приводит, однако, в случае малых деформаций к величинам высших порядков малости и потому для нас несуществен.

Что касается внешних сил, приложенных непосредственно к поверхности тела (которые и являются обычно источником деформации), то они входят в граничные условия к уравнениям равновесия. Пусть $\mathbf{P}$ есть внешняя сила, действующая на единицу площади поверхности тела, так что на элемент поверхности df действует сила $\mathbf{P}\,df$. В равновесии она должна компенсироваться силой $-\sigma_{ik}df_k$, действующей на тот же элемент поверхности со стороны внутренних напряжений. Таким образом, должно быть

$$P_i\,df - \sigma_{ik}\,df_k = 0.$$

Написав df_k в виде $df_k = n_k df$, где $\mathbf{n}$ — единичный вектор, направленный по внешней нормали к поверхности, находим отсюда

$$\sigma_{ik}n_k = P_i. \tag{2.9}$$

Это и есть условие, которое должно выполняться на всей поверхности находящегося в равновесии тела.

Выведем здесь еще формулу, определяющую среднее значение тензора напряжений в деформированном теле. Для этого умножим уравнение (2.7) на x_k и проинтегрируем по всему объему тела:

$$\int \frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} x_k\,dV = \int \frac{\partial(\sigma_{il}x_k)}{\partial x_l}\,dV - \int \sigma_{il}\frac{\partial x_k}{\partial x_l}\,dV = 0.$$

Первый интеграл справа преобразуем в интеграл по поверхности тела; во втором интеграле имеем ввиду, что $\partial x_k/\partial x_l = \delta_{kl}$. Отсюда получаем

$$\oint \sigma_{il}x_k\,df_l - \int \sigma_{ik}\,dV = 0.$$

Подставляя в первый интеграл (2.9), находим

$$\oint P_i x_k\,df = \int \sigma_{ik}\,dV = V\overline{\sigma}_{ik},$$

где V — объем тела, а $\overline{\sigma}_{ik}$ — среднее по всему объему значение тензора напряжений. Воспользовавшись тем, что $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$, можно написать эту формулу в симметричном виде:

$$\overline{\sigma}_{ik} = \frac{1}{2V}\oint (P_i x_k + P_k x_i)\,df. \tag{2.10}$$

Таким образом, среднее значение тензора напряжений может быть определено непосредственно по действующим на тело внешним силам без предварительного решения уравнений равновесия.

Вернемся к приведенному выше доказательству симметричности тензора напряжений; оно нуждается в уточнении. Поставленное физическое условие (представимость тензора M_{ik} в виде интеграла только по поверхности) будет выполнено, не только

если антисимметричная часть тензора σ_{ik} (т. е. подынтегральное выражение в объемном интеграле в (2.3)) равна нулю, но и если она представляет собой некоторую полную дивергенцию, т. е. если

$$\sigma_{ik} - \sigma_{ki} = 2\frac{\partial}{\partial x_l}\varphi_{ikl}, \quad \varphi_{ikl} = -\varphi_{kil}, \tag{2.11}$$

где φ_{ikl} — произвольный тензор, антисимметричный по первой паре индексов. В данном случае этот последний тензор должен выражаться через производные $\partial u_i/\partial x_k$ и соответственно в тензоре напряжений возникнут члены с высшими производными от вектора смещения. В рамках излагаемой в этой книге теории упругости все такие члены должны рассматриваться как малые высшего порядка и опускаться.

С принципиальной точки зрения существенно, однако, что тензор напряжений может быть приведен к симметричному виду и без этих пренебрежений [1]). Дело в том, что определение этого тензора, согласно (2.1), неоднозначно — допустимо любое преобразование вида

$$\widetilde{\sigma}_{ik} - \sigma_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_l}\chi_{ikl}, \quad \chi_{ikl} = -\chi_{ilk}, \tag{2.12}$$

где χ_{ikl} — произвольный тензор, антисимметричный по последней паре индексов; очевидно, что производные $\partial\sigma_{ik}/\partial x_k$ и $\partial\widetilde{\sigma}_{ik}/\partial x_k$, определяющие силу $\mathbf{F}$, тождественно совпадают. Если антисимметричная часть тензора σ_{ik} имеет вид (2.11), то несимметричный тензор σ_{ik} может быть приведен к симметричному виду преобразованием такого вида. Симметричный тензор имеет вид

$$\widetilde{\sigma}_{ik} = \frac{1}{2}(\sigma_{ik} + \sigma_{ki}) + \frac{\partial}{\partial x_l}(\varphi_{ilk} + \varphi_{kli}). \tag{2.13}$$

Действительно, легко убедиться, что разность $\widetilde{\sigma}_{ik} - \sigma_{ik}$ имеет вид (2.12) с тензором

$$\chi_{ikl} = \varphi_{kli} + \varphi_{ilk} - \varphi_{ikl} \tag{2.14}$$

(*P.C. Martin*, *O. Parodi*, *P.S. Pershan*, 1972).

§ 3. Термодинамика деформирования

Рассмотрим какое-нибудь деформированное тело и предположим, что его деформация меняется так, что вектор деформации u_i изменяется на малую величину δu_i. Определим работу,

[1]) В соответствии с общими утверждениями микроскопической теории — ср. II, § 32.

производимую при этом силами внутренних напряжений. Умножая силу $F_i = \partial\sigma_{ik}/\partial x_k$ на перемещение δu_i и интегрируя но всему объему тела, имеем

$$\int \delta R\, dV = \int \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}\delta u_i\, dV.$$

Символом δR мы обозначили работу сил внутренних напряжений в единице объема тела. Интегрируя по частям, получаем

$$\int \delta R\, dV = \oint \sigma_{ik}\delta u_i\, df_k - \int \sigma_{ik}\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_k}\, dV.$$

Рассматривая неограниченную среду, не деформированную на бесконечности, устремим поверхность интегрирования в первом интеграле к бесконечности; тогда на ней $\sigma_{ik} = 0$, и интеграл исчезает. Второй же интеграл можно, воспользовавшись симметрией тензора σ_{ik}, переписать в виде

$$\int \delta R\, dV = -\frac{1}{2}\int \sigma_{ik}\left(\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial\delta u_k}{\partial x_i}\right) dV =$$
$$= -\frac{1}{2}\int \sigma_{ik}\delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) dV = -\int \sigma_{ik}\delta u_{ik}\, dV.$$

Таким образом, находим

$$\delta R = -\sigma_{ik}\delta u_{ik}. \tag{3.1}$$

Эта формула определяет работу δR по изменению тензора деформации.

Если деформация тела достаточно мала, то по прекращении действия вызвавших деформацию внешних сил тело возвращается в исходное недеформированное состояние. Такие деформации называют *упругими*. При больших деформациях прекращение действия внешних сил не приводит к полному исчезновению деформации, — остается, как говорят, некоторая остаточная деформация, так что состояние тела отличается от того, в каком оно находилось до приложения к нему сил. Такие деформации называют *пластическими*. В дальнейшем везде (за исключением гл. IV) мы будем рассматривать только упругие деформации.

Предположим далее, что процесс деформирования совершается настолько медленно, что в каждый момент времени в теле успевает установиться состояние термодинамического равновесия, соответствующее тем внешним условиям, в которых тело в данный момент находится (фактически это условие почти всегда выполняется). Тогда процесс будет термодинамически обратимым.

Условимся относить в дальнейшем все такие термодинамические величины, как энтропия S, внутренняя энергия $\mathcal{E}$ и т. п.,

к единице объема тела (а не к единице массы, как это принято в гидродинамике) и обозначать их соответствующими большими буквами.

В этой связи необходимо сделать следующее замечание. Строго говоря, надо различать единицы объема до и после деформирования; эти объемы содержат, вообще говоря, различные количества вещества. Все термодинамические величины мы будем в дальнейшем везде, кроме гл. VI относить к единице объема недеформированного тела, т. е. к заключенному в нем количеству вещества, которое после деформирования может занять объем, несколько отличный от первоначального объема. Соответственно этому, например, полная энергия тела получается всегда интегрированием $\mathcal{E}$ по объему недеформированного тела.

Бесконечно малое изменение $d\mathcal{E}$ внутренней энергии равно разности полученного данной единицей объема тела количества тепла и произведенной силами внутренних напряжений работы dR. Количество тепла равно при обратимом процессе $T\,dS$, где T — температура. Таким образом, $d\mathcal{E} = T\,dS - dR$; взяв dR из (3.1), получим

$$d\mathcal{E} = T\,dS + \sigma_{ik}\,du_{ik}. \tag{3.2}$$

Это — основное термодинамическое соотношение для деформируемых тел.

При равномерном всестороннем сжатии тензор напряжений равен $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}$ (2.6). В этом случае

$$\sigma_{ik}\,du_{ik} = -p\delta_{ik}\,du_{ik} = -p\,du_{ii}.$$

Но мы видели (см. (1.6)), что сумма u_{ii} представляет собой относительное изменение объема при деформировании. Если рассматривать единицу объема, то u_{ii} будет просто изменением этого объема, а du_{ii} — элементом dV этого изменения. Термодинамическое соотношение принимает тогда обычный вид:

$$d\mathcal{E} = T\,dS - p\,dV. \tag{3.2a}$$

Вводя вместо энергии $\mathcal{E}$ свободную энергию тела $F = \mathcal{E} - TS$, переписываем соотношение (3.2) в виде

$$dF = -S\,dT + \sigma_{ik}\,du_{ik}. \tag{3.3}$$

Наконец, термодинамический потенциал Φ тела определяется как

$$\Phi = \mathcal{E} - TS - \sigma_{ik}u_{ik} = F - \sigma_{ik}u_{ik}. \tag{3.4}$$

Это — обобщение обычного выражения $\Phi = \mathcal{E} - TS + pV$ [1]).

[1]) При всестороннем сжатии выражение (3.4) переходит в

$$\Phi = F + pu_{ii} = F + p(V - V_0),$$

где $V - V_0$ — изменение объема в результате деформации. Отсюда видно, что принимаемое нами здесь определение Φ отличается от применяемого обычно в термодинамике $\Phi = F + pV$ членом $-pV_0$.

Подставив (3.4) в (3.3), находим

$$d\Phi = -S\,dT - u_{ik}\,d\sigma_{ik}. \tag{3.5}$$

Независимыми переменными в (3.2) и (3.3) являются соответственно S, u_{ik} и T, u_{ik}. Компоненты тензора напряжений можно получить, дифференцируя E или F по компонентам тензора деформации соответственно при постоянной энтропии S или температуре T:

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u_{ik}}\right)_S = \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ik}}\right)_T. \tag{3.6}$$

Аналогично, дифференцируя Φ по компонентам σ_{ik}, можно получить компоненты u_{ik}:

$$u_{ik} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ik}}\right)_T. \tag{3.7}$$

§ 4. Закон Гука

Для того чтобы иметь возможность применять общие термодинамические соотношения к тем или иным конкретным случаям деформаций, необходимо иметь выражение для свободной энергии тела F как функции от тензора деформации. Это выражение легко получить, воспользовавшись малостью деформаций и соответственно этому разложив свободную энергию в ряд по степеням u_{ik}. При этом мы будем пока рассматривать только изотропные тела; соответствующие выражения для кристаллов будут получены ниже, в § 10.

Рассматривая деформированное тело, находящееся при некоторой (постоянной вдоль тела) температуре, мы будем считать недеформированным состояние тела при отсутствии внешних сил при той же температуре (эта оговорка необходима ввиду теплового расширения; см. подробнее § 6). Тогда при $u_{ik}=0$ должны отсутствовать также и внутренние напряжения, т. е. должны быть $\sigma_{ik} = 0$. Поскольку $\sigma_{ik} = \partial F/\partial u_{ik}$, то отсюда следует, что в разложении F по степеням u_{ik} должны отсутствовать линейные члены.

Далее, поскольку свободная энергия является величиной скалярной, то и каждый член в разложении F тоже должен быть скаляром. Из компонент симметричного тензора u_{ik} можно составить два независимых скаляра второй степени; в качестве них можно выбрать квадрат u_{ii}^2 суммы диагональных компонент и сумму u_{ik}^2 квадратов всех компонент тензора u_{ik}. Разлагая F по степеням u_{ik}, мы получим, следовательно, с точностью до членов второго порядка выражение вида

$$F = F_0 + \frac{\lambda}{2}u_{ii}^2 + \mu u_{ik}^2. \tag{4.1}$$

Это есть общее выражение для свободной энергии деформированного изотропного тела. Величины λ и μ называют *коэффициентами Ламэ.*

Мы видели в § 1, что изменение объема при деформации определяется суммой u_{ii}. Если эта сумма равна нулю, то это значит, что при деформировании объем данного тела остается неизменным и меняется только его форма. Такие деформации без изменения объема называют *сдвигом.*

Обратным случаем является деформация, сопровождающаяся изменением объема, но без изменения формы. Каждый элемент объема тела при такой деформации остается подобным самому себе. Из § 1 следует, что тензор такой деформации имеет вид $u_{ik} = \text{const}\cdot\delta_{ik}$. Такую деформацию называют *всесторонним сжатием.*

Всякую деформацию можно представить в виде суммы деформаций чистого сдвига и всестороннего сжатия. Для этого достаточно написать тождество

$$u_{ik} = \left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\right) + \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}. \tag{4.2}$$

Первый член справа представляет собой, очевидно, чистый сдвиг, поскольку сумма его диагональных членов равна нулю (напоминаем, что $\delta_{ii} = 3$). Второй же член связан со всесторонним сжатием.

В качестве общего выражения для свободной энергии деформированного изотропного тела удобно написать вместо (4.1) другое, воспользовавшись указанным разложением произвольной деформации на сдвиг и всестороннее сжатие. Именно, выберем в качестве двух независимых скаляров второй степени суммы квадратов компонент соответственно первого и второго членов в (4.2). Тогда F будет иметь вид [1])

$$F = \mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\right)^2 + \frac{K}{2}u_{ll}^2. \tag{4.3}$$

Величины K и μ называют соответственно *модулем всестороннего сжатия* и *модулем сдвига;* K связано с коэффициентами Ламэ соотношением

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu. \tag{4.4}$$

---

[1]) Постоянный член F_0 — свободная энергия недеформированного тела — в дальнейшем не будет нас интересовать. Поэтому мы будем для краткости всегда опускать его, подразумевая под F одну только интересующую нас свободную энергию деформации или, как говорят, упругую свободную энергию.

В состоянии термодинамического равновесия свободная энергия, как известно, минимальна. Если на тело не действуют никакие внешние силы, то F как функция от u_{ik} должно иметь минимум при $u_{ik} = 0$. Это значит, что квадратичная форма (4.3) должна быть положительна. Если выбрать тензор u_{ik} таким, что $u_{ll} = 0$, то в (4.3) останется только первый член; если же выбрать тензор вида $u_{ik} = \mathrm{const} \cdot \delta_{ik}$, то останется только второй член. Отсюда следует, что необходимым (и, очевидно, достаточным) условием положительности формы (4.3) является положительность каждого из коэффициентов K и μ.

Таким образом, мы приходим к результату, что модули сжатия и сдвига всегда положительны:

$$K > 0, \quad \mu > 0. \tag{4.5}$$

Воспользуемся теперь общим термодинамическим соотношением (3.6) и определим с его помощью тензор напряжений. Для вычисления производных $\partial F/\partial u_{ik}$ напишем полный дифференциал dF (при постоянной температуре). Имеем

$$dF = Ku_{ll}\,du_{ll} + 2\mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}u_{ll}\delta_{ik}\right)\,d\left(u_{ik} - \frac{1}{3}u_{ll}\delta_{ik}\right).$$

Во втором члене умножение первой скобки на δ_{ik} дает нуль, так что остается

$$dF = Ku_{ll}\,du_{ll} + 2\mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}u_{ll}\delta_{ik}\right)\,du_{ik}$$

или, написав du_{ll} в виде $\delta_{ik}du_{ik}$,

$$dF = \left[Ku_{ll}\delta_{ik} + 2\mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}u_{ll}\delta_{ik}\right)\right]\,du_{ik}.$$

Отсюда имеем для тензора напряжений

$$\sigma_{ik} = Ku_{ll}\delta_{ik} + 2\mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\right). \tag{4.6}$$

Это выражение определяет тензор напряжений через тензор деформации для изотропного тела. Из него видно, что если деформация является чистым сдвигом или чистым всесторонним сжатием, то связь между σ_{ik} и u_{ik} определяется соответственно одним только модулем сдвига или модулем всестороннего сжатия.

Нетрудно получить и обратные формулы, выражающие u_{ik} через σ_{ik}. Для этого найдем сумму диагональных членов σ_{ii}. Поскольку для второго члена (4.6) эта сумма обращается в нуль, то $\sigma_{ii} = 3Ku_{ii}$, или

$$u_{ii} = \frac{1}{3K}\sigma_{ii}. \tag{4.7}$$

Подставляя это выражение в (4.6) и определяя оттуда u_{ik}, находим

$$u_{ik} = \frac{1}{9K}\delta_{ik}\sigma_{ll} + \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\sigma_{ll}\right), \tag{4.8}$$

что и определяет тензор деформации по тензору напряжений.

Равенство (4.7) показывает, что относительное изменение объема u_{ii} при всякой деформации изотропного тела зависит только от суммы σ_{ii} диагональных компонент тензора напряжений, причем связь между u_{ii} и σ_{ii} определяется только модулем всестороннего сжатия. При всестороннем (равномерном) сжатии тела тензор напряжений имеет вид $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}$. Поэтому в этом случае имеем из (4.7):

$$u_{ii} = -\frac{p}{K}. \tag{4.9}$$

Поскольку деформации малы, то u_{ii} и p — малые величины, и мы можем написать отношение u_{ii}/p относительного изменения объема к давлению в дифференциальном виде; тогда

$$\frac{1}{K} = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T.$$

Величину $1/K$ называют *коэффициентом всестороннего сжатия* (или просто коэффициентом сжатия).

Из (4.8) мы видим, что тензор деформации u_{ik} является линейной функцией тензора напряжений σ_{ik}. Другими словами, деформация пропорциональна приложенным к телу силам. Этот закон, имеющий место для малых деформаций, называют *законом Гука* [1]).

Приведем еще полезную форму выражения для свободной энергии деформированного тела, получающуюся непосредственно из квадратичности F по тензору деформации. Согласно теореме Эйлера имеем

$$u_{ik}\frac{\partial F}{\partial u_{ik}} = 2F,$$

откуда, ввиду того что $\partial F/\partial u_{ik} = \sigma_{ik}$,

$$F = \frac{\sigma_{ik}u_{ik}}{2}. \tag{4.10}$$

Если в эту формулу подставить u_{ik}, выраженные в виде линейных комбинаций компонент σ_{ik}, то упругая энергия будет

[1]) Фактически закон Гука применим ко всем упругим деформациям. Дело в том, что деформации обычно перестают быть упругими еще тогда, когда они настолько малы, что закон Гука является достаточно хорошим приближением (исключение представляют тела типа резины).

представлена как квадратичная функция величин σ_{ik}. Снова применяя теорему Эйлера, будем иметь

$$\sigma_{ik}\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ik}} = 2F,$$

и сравнение с (4.10) показывает, что

$$u_{ik} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ik}}. \tag{4.11}$$

Следует, однако, подчеркнуть, что, в то время как формула $\sigma_{ik} = \partial F/\partial u_{ik}$ является общим термодинамическим соотношением, справедливость обратной формулы (4.11) связана с выполнением закона Гука.

§ 5. Однородные деформации

Рассмотрим несколько простейших случаев *однородных деформаций*, т. е. деформаций, при которых тензор деформации постоянен вдоль всего объема тела [1]). Однородной деформацией является, например, уже рассмотренное нами равномерное всестороннее сжатие.

Рассмотрим теперь так называемое *простое растяжение* (или сжатие) стержня. Пусть стержень расположен вдоль оси z и к его концам приложены силы, растягивающие его в противоположные стороны. Эти силы действуют равномерно на всю поверхность концов стержня; сила, действующая на единицу поверхности, пусть будет p.

Поскольку деформация однородна, т. е. u_{ik} постоянны вдоль тела, то постоянен также и тензор напряжений σ_{ik}, а поэтому его можно определить непосредственно из граничных условий (2.9). На боковой поверхности стержня внешние силы отсутствуют, откуда следует, что $\sigma_{ik}n_k = 0$. Поскольку единичный вектор $\mathbf{n}$ на боковой поверхности перпендикулярен к оси z, т. е. имеет только компоненты n_x, n_y, то отсюда следует, что все компоненты σ_{ik}, за исключением только σ_{zz}, равны нулю. На поверхности концов стержня имеем $\sigma_{zi}n_i = p$, откуда $\sigma_{zz} = p$.

Из общего выражения (4.8), связывающего компоненты тензоров деформации и напряжений, мы видим, что все компоненты u_{ik} с $i \neq k$ равны нулю. Для остальных компонент находим

$$u_{xx} = u_{yy} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\mu} - \frac{1}{3K}\right)p, \quad u_{zz} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3K} + \frac{1}{\mu}\right)p. \tag{5.1}$$

---

[1]) Компоненты тензора деформации как функции координат не являются вполне независимыми величинами, поскольку шесть различных компонент u_{ik} выражаются через производные всего трех независимых функций — компонент вектора $\mathbf{u}$ (см. задачу 9 § 7). Но шесть постоянных величин u_{ik} могут быть в принципе заданы произвольным образом.

Компонента u_{zz} определяет относительное удлинение стержня вдоль оси z. Коэффициент при p называют *коэффициентом растяжения*, а обратную величину — *модулем растяжения* (или *модулем Юнга*) E:

$$u_{zz} = \frac{p}{E}, \tag{5.2}$$

где

$$E = \frac{9K\mu}{3K+\mu}. \tag{5.3}$$

Компоненты u_{xx} и u_{yy} определяют относительное сжатие стержня в поперечном направлении. Отношение поперечного сжатия к продольному растяжению называют *коэффициентом Пуассона* σ [1]):

$$u_{xx} = -\sigma u_{zz}, \tag{5.4}$$

где

$$\sigma = \frac{1}{2}\frac{3K-2\mu}{3K+\mu}. \tag{5.5}$$

Поскольку K и μ всегда положительны, то коэффициент Пуассона может меняться для различных веществ только в пределах от -1 (при $K=0$) до $1/2$ (при $\mu=0$). Таким образом [2]),

$$-1 \leqslant \sigma \leqslant \frac{1}{2}. \tag{5.6}$$

Наконец, относительное увеличение объема стержня при его растяжении равно

$$u_{ii} = \frac{p}{K}. \tag{5.7}$$

Свободную энергию растянутого стержня можно написать, воспользовавшись непосредственно формулой (4.10). Поскольку от нуля отлична только компонента σ_{zz}, то

$$F = \frac{1}{2}u_{zz}\sigma_{zz} = \frac{p^2}{2E}. \tag{5.8}$$

В дальнейшем мы будем пользоваться, как это обычно принято, величинами E и σ вместо модулей K и μ. Эти последние,

---

[1]) Обозначение коэффициента Пуассона через σ, а компонент тензора напряжений через σ_{ik} не может привести к недоразумению, поскольку последние, в отличие от первого, всегда имеют индексы.

[2]) Фактически коэффициент Пуассона меняется только в пределах от 0 до 1/2. В настоящее время неизвестны тела, у которых было бы $\sigma < 0$, т. е. которые бы утолщались при продольном растяжении. Укажем также, что неравенству $\sigma > 0$ отвечает $\lambda > 0$; другими словами, всегда положительны оба члена не только в выражении (4.3), но и в (4.1), хотя это и не требуется термодинамикой. Близкие к 1/2 значения σ (например, у резины) соответствуют модулю сдвига, малому по сравнению с модулем сжатия.

а также второй коэффициент Ламэ λ выражаются через E и σ формулами

$$\lambda = \frac{E\sigma}{(1-2\sigma)(1+\sigma)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\sigma)}. \tag{5.9}$$

Выпишем здесь общие формулы предыдущего параграфа с коэффициентами, выраженными через E и σ. Для свободной энергии имеем

$$F = \frac{E}{2(1+\sigma)}\left(u_{ik}^2 + \frac{\sigma}{1-2\sigma}u_{ll}^2\right). \tag{5.10}$$

Тензор напряжений выражается через тензор деформации согласно

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\sigma}\left(u_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}u_{ll}\delta_{ik}\right). \tag{5.11}$$

Обратно:

$$u_{ik} = \frac{1}{E}[(1+\sigma)\sigma_{ik} - \sigma\sigma_{ll}\delta_{ik}]. \tag{5.12}$$

Поскольку формулами (5.11) и (5.12) приходится постоянно пользоваться, выпишем их здесь для удобства в расписанном по компонентам виде:

$$\begin{gathered}
\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}[(1-\sigma)u_{xx} + \sigma(u_{yy}+u_{zz})], \\
\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}[(1-\sigma)u_{yy} + \sigma(u_{xx}+u_{zz})], \\
\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}[(1-\sigma)u_{zz} + \sigma(u_{xx}+u_{yy})], \\
\sigma_{xy} = \frac{E}{1+\sigma}u_{xy}, \quad \sigma_{xz} = \frac{E}{1+\sigma}u_{xz}, \quad \sigma_{yz} = \frac{E}{1+\sigma}u_{yz}
\end{gathered} \tag{5.13}$$

и обратные формулы;

$$\begin{gathered}
u_{xx} = \frac{1}{E}[\sigma_{xx} - \sigma(\sigma_{yy}+\sigma_{zz})], \\
u_{yy} = \frac{1}{E}[\sigma_{yy} - \sigma(\sigma_{xx}+\sigma_{zz})], \\
u_{zz} = \frac{1}{E}[\sigma_{zz} - \sigma(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})], \\
u_{xy} = \frac{1+\sigma}{E}\sigma_{xy}, \quad u_{xz} = \frac{1+\sigma}{E}\sigma_{xz}, \quad u_{yz} = \frac{1+\sigma}{E}\sigma_{yz}.
\end{gathered} \tag{5.14}$$

Рассмотрим теперь сжатие стержня, боковые стороны которого закреплены так, что его поперечные размеры не могут меняться. Внешние силы, производящие сжатие стержня, приложены к его основаниям и действуют вдоль его длины, которую мы

опять выберем в качестве оси z. Такую деформацию называют *односторонним сжатием.* Поскольку стержень деформируется только вдоль оси z, то из всех компонент u_{ik} от нуля отлична только u_{zz}. Из (5.13) имеем теперь

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}u_{zz}, \quad \sigma_{zz} = \frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}u_{zz}.$$

Обозначая опять сжимающую силу через p ($\sigma_{zz} = p$; p отрицательно при сжатии), имеем

$$u_{zz} = \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)}p. \qquad (5.15)$$

Коэффициент при p называется коэффициентом одностороннего сжатия. Для напряжений, возникающих в поперечном направлении, имеем

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = p\frac{\sigma}{1-\sigma}. \qquad (5.16)$$

Наконец, для свободной энергии стержня имеем

$$F = p^2\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{2E(1-\sigma)}. \qquad (5.17)$$

§ 6. Деформации с изменением температуры

Рассмотрим теперь деформации, сопровождающиеся изменением температуры тела; изменение температуры может происходить как в результате самого процесса деформирования, так и по посторонним причинам.

Будем считать недеформированным состояние тела при отсутствии внешних сил при некоторой заданной температуре T_0. Если тело находится при температуре T, отличной от T_0, то даже при отсутствии внешних сил оно будет, вообще говоря, деформировано в связи с наличием теплового расширения. Поэтому в разложение свободной энергии $F(T)$ будут входить не только квадратичные, но и линейные по тензору деформации члены. Из компонент тензора второго ранга u_{ik} можно составить всего только одну линейную скалярную величину — сумму u_{ii} его диагональных компонент. Далее мы будем предполагать, что сопровождающее деформацию изменение $T - T_0$ температуры мало. Тогда можно считать, что коэффициент при u_{ii} в разложении F (который должен обращаться в нуль при $T = T_0$) просто пропорционален разности $T - T_0$. Таким образом, получим для свободной энергии следующую формулу (заменяющую (4.3)):

$$F(T) = F_0(T) - K\alpha(T-T_0)u_{ll} + \mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\right)^2 + \frac{K}{2}u_{ll}^2, \qquad (6.1)$$

где коэффициент при $T - T_0$ написан в виде $-K\alpha$. Величины μ, K, α надо считать здесь постоянными; учет их зависимости от температуры привел бы к величинам высшего порядка малости.

Дифференцируя F по u_{ik}, получим тензор напряжений. Имеем

$$\sigma_{ik} = -K\alpha(T - T_0)\delta_{ik} + Ku_{ll}\delta_{ik} + 2\mu\Big(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\Big). \qquad (6.2)$$

Первый член здесь представляет собой дополнительные напряжения, связанные с изменением температуры тела. При свободном тепловом расширении тела (при отсутствии внешних сил) внутренние напряжения должны отсутствовать. Приравнивая σ_{ik} нулю, найдем, что u_{ik} имеет вид: $\text{const} \cdot \delta_{ik}$, причем

$$u_{ll} = \alpha(T - T_0). \qquad (6.3)$$

Но u_{ll} представляет собой относительное изменение объема при деформации. Таким образом, α является не чем иным, как *коэффициентом теплового расширения* тела.

Среди различных (в термодинамическом смысле) типов деформаций существенны изотермические и адиабатические деформации. При изотермических деформациях температура тела не меняется. Соответственно этому в (6.1) надо положить $T = T_0$, и мы возвращаемся к обычным формулам; коэффициенты K и μ можно поэтому назвать *изотермическими модулями.*

Адиабатическими являются деформации, при которых не происходит обмена теплом между различными участками тела, а также, конечно, и между телом и окружающей средой. Энтропия S остается при этом постоянной. Как известно, энтропия равна производной $-\partial F/\partial T$ от свободной энергии по температуре. Дифференцируя выражение (6.1), находим с точностью до членов первого порядка по u_{ik}

$$S(T) = S_0(T) + K\alpha u_{ll}. \qquad (6.4)$$

Приравняв это выражение постоянной, можно определить изменение температуры при деформации, которое оказывается пропорциональным u_{ll}:

$$\frac{C_v}{T_0}(T - T_0) = -K\alpha u_{ll}. \qquad (6.5)$$

Подставив это выражение в (6.2), получим для σ_{ik} выражение обычного типа

$$\sigma_{ik} = K_{\text{ад}}u_{ll}\delta_{ik} + 2\mu\Big(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\Big) \qquad (6.6)$$

с тем же модулем сдвига, но с другим модулем сжатия $K_{\text{ад}}$. Связь адиабатического модуля $K_{\text{ад}}$ с обычным, изотермическим

модулем K можно, однако, найти и непосредственно по общей термодинамической формуле

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T + \frac{T}{C_p}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

(C_p — теплоемкость при постоянном давлении, отнесенная к единице объема тела). Если понимать под V объем, занимаемый веществом, находившимся до деформации в единице объема тела, то производные $\partial V/\partial T$ и $\partial V/\partial p$ определяют относительные изменения объема соответственно при нагревании и при сжатии. Другими словами,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \alpha, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S = -\frac{1}{K_{\text{ад}}}, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -\frac{1}{K}.$$

Таким образом, получаем для связи между адиабатическими и изотермическими модулями [1])

$$\frac{1}{K_{\text{ад}}} = \frac{1}{K} - \frac{T\alpha^2}{C_p}, \quad \mu_{\text{ад}} = \mu. \tag{6.7}$$

Для *адиабатических* модуля растяжения и коэффициента Пуассона легко получаем следующие соотношения:

$$E_{\text{ад}} = \frac{E}{1 - ET\alpha^2/(9C_p)}, \quad \sigma_{\text{ад}} = \frac{\sigma + ET\alpha^2/(9C_p)}{1 - ET\alpha^2/(9C_p)}. \tag{6.8}$$

В реальных случаях величина $ET\alpha^2/C_p$ обычно мала, и поэтому с достаточной точностью можно написать:

$$E_{\text{ад}} = E + E^2\frac{T\alpha^2}{9C_p}, \quad \sigma_{\text{ад}} = \sigma + (1+\sigma)E\frac{T\alpha^2}{9C_p}. \tag{6.9}$$

При изотермической деформации тензор напряжений выражается в виде производных от свободной энергии:

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ik}}\right)_T.$$

При постоянной же энтропии надо написать (см. (3.6)):

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u_{ik}}\right)_S,$$

где $\mathcal{E}$ — внутренняя энергия. Соответственно этому при адиабатических деформациях выражение, аналогичное (4.3), определяет не свободную энергию, а просто внутреннюю энергию единицы объема тела:

$$\mathcal{E} = \frac{K_{\text{ад}}}{2}u_{ll}^2 + \mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}u_{ll}\delta_{ik}\right)^2. \tag{6.10}$$

---

[1]) Для того чтобы получить эти формулы из (6.5), (6.6), надо было бы использовать еще и известную термодинамическую формулу $C_p - C_v = T\alpha^2 K$.

§ 7. Уравнения равновесия изотропных тел

Выведем теперь уравнения равновесия изотропных твердых тел. Для этого надо подставить в общие уравнения (2.7)

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i = 0$$

выражение (5.11) для тензора напряжений. Имеем

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\frac{\partial u_{ll}}{\partial x_i} + \frac{E}{1+\sigma}\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_k}.$$

Подставляя сюда $u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$, получим уравнения равновесия в виде

$$\frac{E}{2(1+\sigma)}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)}\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i\,\partial x_l} + \rho g_i = 0. \qquad (7.1)$$

Эти уравнения удобно переписать в векторных обозначениях. В этих обозначениях величины $\partial^2 u_i/\partial x_k^2$ являются компонентами вектора $\Delta\mathbf{u}$, а $\partial u_l/\partial x_l \equiv \operatorname{div}\mathbf{u}$. Таким образом, уравнения равновесия приобретают вид

$$\Delta\mathbf{u} + \frac{1}{1-2\sigma}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} = -\rho\mathbf{g}\frac{2(1+\sigma)}{E}. \qquad (7.2)$$

Иногда бывает удобным писать это уравнение в несколько ином виде, воспользовавшись известной формулой векторного анализа:

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} = \Delta\mathbf{u} + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u}.$$

Тогда (7.2) приобретает вид

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} - \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u} = -\rho\mathbf{g}\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)}. \qquad (7.3)$$

Мы пишем уравнения равновесия в однородном поле сил тяжести, имея в виду, что последние являются наиболее обычными в теории упругости объемными силами. При наличии каких-либо иных объемных сил вектор $\rho\mathbf{g}$ в правой части уравнения должен быть заменен соответствующей другой плотностью объемных сил.

Наиболее существен случай, когда деформация вызывается не объемными силами, а силами, приложенными к поверхности тела. Тогда уравнение равновесия гласит

$$(1-2\sigma)\Delta\mathbf{u} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \qquad (7.4)$$

или в другом виде

$$2(1-\sigma)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} - (1-2\sigma)\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = 0. \tag{7.5}$$

Внешние силы входят в решение только через посредство граничных условий.

Применяя к уравнению (7.4) операцию div и помня, что $\mathrm{div}\,\mathrm{grad} \equiv \Delta$, находим

$$\Delta\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0, \tag{7.6}$$

т. е. величина $\mathrm{div}\,\mathbf{u}$ (определяющая изменение объема при деформации) является гармонической функцией. Применяя же к уравнению (7.4) оператор Лапласа Δ, получим теперь

$$\Delta\Delta\mathbf{u} = 0, \tag{7.7}$$

т. е. в равновесии вектор деформации удовлетворяет *бигармоническому уравнению*. Эти результаты остаются в силе и в однородном поле тяжести (при операциях дифференцирования правая часть уравнения (7.2) исчезает), но они несправедливы в общем случае переменных вдоль тела объемных внешних сил.

Тот факт, что вектор деформации удовлетворяет бигармоническому уравнению, не означает, разумеется, что общий интеграл уравнений равновесия (при отсутствии объемных сил) есть произвольная бигармоническая векторная функция; следует помнить, что функция $\mathbf{u}(x,y,z)$ должна в действительности удовлетворять еще и дифференциальному уравнению более низкого порядка (7.4). В то же время оказывается возможным выразить общий интеграл уравнений равновесия через производные от произвольного бигармонического вектора (см. задачу 10).

Если тело неравномерно нагрето, то в уравнении равновесия должен быть добавлен дополнительный член. В тензоре напряжений должен быть учтен член $-K\alpha(T-T_0)\delta_{ik}$ (см. (6.2)) и соответственно в $\partial\sigma_{ik}/\partial x_k$ возникает член

$$-K\alpha\frac{\partial T}{\partial x_i} = -\frac{E\alpha}{3(1-2\sigma)}\frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

В результате получаем уравнения равновесия в виде

$$\frac{3(1-\sigma)}{1+\sigma}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} - \frac{3(1-2\sigma)}{2(1+\sigma)}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = \alpha\nabla T. \tag{7.8}$$

Остановимся на частном случае *плоской деформации*, при которой во всем теле одна из компонент вектора смещения равна нулю ($u_z = 0$), а компоненты u_x, u_y зависят только от x, y. При этом тождественно обращаются в нуль компоненты u_{zz}, u_{xz}, u_{yz} тензора деформации, а с ними и компоненты σ_{xz}, σ_{yz} тензора напряжений (но не продольное напряжение σ_{zz}, существование которого должно обеспечить постоянство длины тела вдоль оси z).

Поскольку все величины не зависят от координаты z, то уравнения равновесия (при отсутствии внешних объемных сил) $\partial\sigma_{ik}/\partial x_k = 0$ сводятся в данном случае к двум уравнениям:

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} = 0. \tag{7.9}$$

Наиболее общим видом функций σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{yy}, удовлетворяющих этим уравнениям, является

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2\chi}{\partial x\,\partial y}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}, \tag{7.10}$$

где χ — произвольная функция от x и y. Легко получить уравнение, которому должна удовлетворять эта функция. Такое уравнение должно существовать в силу того, что три величины σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{yy} выражаются в действительности всего через две величины u_x, u_y и потому не являются независимыми. С помощью формул (5.13) найдем для плоской деформации

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}(u_{xx} + u_{yy}).$$

Но

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \Delta\chi, \quad u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \equiv \operatorname{div}\mathbf{u},$$

и поскольку $\operatorname{div}\mathbf{u}$ есть, согласно (7.6), гармоническая функция, то мы заключаем, что функция χ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Delta\chi = 0, \tag{7.11}$$

т. е. является бигармонической. Функцию χ называют *функцией напряжений*. После того как плоская задача решена и функция χ известна, продольное напряжение σ_{zz} определяется непосредственно по формуле

$$\sigma_{zz} = \frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}(u_{xx} + u_{yy}) = \sigma(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}),$$

или

$$\sigma_{zz} = \sigma\Delta\chi. \tag{7.12}$$

Задачи

1. Определить деформацию длинного стержня (длины l), стоящего вертикально в поле тяжести.

Решение. Направляем ось z по оси стержня, а плоскость xy — в плоскости его нижнего основания. Уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_{xi}}{\partial x_i} = \frac{\partial\sigma_{yi}}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{zi}}{\partial x_i} = \rho g.$$

На боковой поверхности стержня должны обращаться в нуль все компоненты σ_{ik}, кроме σ_{zz}, а на верхнем $(z = l)$ основании $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$. Удовлетворяющее этим условиям решение уравнений равновесия есть

$$\sigma_{zz} = -\rho g(l - z),$$

а все остальные $\sigma_{ik} = 0$. По σ_{ik} определяем u_{ik} в виде

$$u_{xx} = u_{yy} = \frac{\sigma}{E}\rho g(l - z), \quad u_{zz} = -\frac{\rho g(l - z)}{E}, \quad u_{xy} = u_{xz} = u_{yz} = 0,$$

а отсюда интегрированием — компоненты вектора деформации

$$u_x = \frac{\sigma}{E}\rho g(l - z)x,$$

$$u_y = \frac{\sigma}{E}\rho g(l - z)y,$$

$$u_z = -\frac{\rho g}{2E}\{l^2 - (l - z)^2 - \sigma(x^2 + y^2)\}.$$

Выражение для u_z удовлетворяет граничному условию $u_z = 0$ только в одной точке нижней поверхности стержня. Поэтому полученное решение неприменимо вблизи нижнего конца стержня.

2. Определить деформацию полого шара (наружный и внутренний радиусы R_2 и R_1), внутри которого действует давление p_1; давление снаружи p_2.

Решение. Вводим сферические координаты с началом в центре шара. Деформация $\mathbf{u}$ направлена везде по радиусу и является функцией только от r. Поэтому $\operatorname{rot}\mathbf{u} = 0$, и уравнение (7.5) приобретает вид

$$\nabla \operatorname{div}\mathbf{u} = 0.$$

Отсюда

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = \frac{1}{r^2}\frac{d(r^2 u)}{r} = \text{const} \equiv 3a,$$

или

$$u = ar + b/r^2.$$

Компоненты тензора деформации (см. формулы (1.7)):

$$u_{rr} = a - \frac{2b}{r^3}, \quad u_{\theta\theta} = u_{\varphi\varphi} = a + \frac{b}{r^3}.$$

Радиальное напряжение

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}[(1-\sigma)u_{rr} + 2\sigma u_{\theta\theta}] = \frac{E}{1-2\sigma}a - \frac{2E}{1+\sigma}\frac{b}{r^3}.$$

Постоянные a и b определяются из граничных условий: $\sigma_{rr} = -p_1$ при $r = R_1$ и $\sigma_{rr} = -p_2$ при $r = R_2$. Отсюда находим

$$a = \frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3}\frac{1-2\sigma}{E}, \quad b = \frac{R_1^3 R_2^3 (p_1 - p_2)}{R_2^3 - R_1^3}\frac{1+\sigma}{2E}.$$

Так, распределение напряжений по толщине шарового слоя, внутри которого действует давление $p_1 = p$, а снаружи $p_2 = 0$, дается формулами

$$\sigma_{rr} = \frac{pR_1^3}{R_2^3 - R_1^3}\left(1 - \frac{R_2^3}{r^3}\right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{pR_1^3}{R_2^3 - R_1^3}\left(1 + \frac{R_2^3}{2r^3}\right).$$

Для тонкой сферической оболочки толщины $h = R_2 - R_1 \ll R$ имеем приближенно

$$u = \frac{pR^2(1-\sigma)}{2Eh}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{pR}{2h}, \quad \overline{\sigma}_{rr} = \frac{p}{2}$$

($\overline{\sigma}_{rr}$ — среднее по толщине оболочки значение радиального напряжения).

Распределение напряжений в неограниченной упругой среде с шарообразной полостью (радиуса R), подвергаемой равномерному всестороннему сжатию, получим, положив $R_1 = R$, $R_2 = \infty$, $p_1 = 0$, $p_2 = p$:

$$\sigma_{rr} = -p\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = -p\left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right).$$

На границе полости тангенциальные напряжения $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = -3p/2$, т. е. превышают давление на бесконечности.

3. Определить деформацию сплошной сферы (радиуса R) под влиянием собственного гравитационного поля.

Решение. Сила тяготения, действующая на единицу массы сферического тела, равна $-g\mathbf{r}/R$. Подставив это выражение вместо $\mathbf{g}$ в уравнение (7.3), получим для радиального смещения следующее уравнение:

$$\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}\frac{d(r^2 u)}{dr}\right) = \rho g \frac{r}{R}.$$

Решение, конечное при $r = 0$ и удовлетворяющее условию $\sigma_{rr} = 0$ при $r = R$, есть

$$u = -\frac{g\rho R(1-2\sigma)(1+\sigma)}{10E(1-\sigma)} r \left[\frac{3-\sigma}{1+\sigma} - \frac{r^2}{R^2}\right].$$

Отметим, что внутри сферической поверхности радиуса $R\left(\dfrac{3-\sigma}{3(1+\sigma)}\right)^{1/2}$ вещество сжато ($u_{rr} < 0$), а вне ее — растянуто ($u_{rr} > 0$). Давление в центре шара оказывается равным

$$\frac{3-\sigma}{10(1-\sigma)} g\rho R.$$

4. Определить деформацию полой цилиндрической трубы (наружный и внутренний радиусы R_2 и R_1), внутри которой действует давление p; давление снаружи отсутствует [1]).

Решение. Вводим цилиндрические координаты с осью z по оси трубы. При однородном вдоль трубы давлении деформация представляет собой чисто радиальное смещение $u_r = u(r)$. Аналогично задаче 2 имеем теперь

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{r}\frac{d(ru)}{r} = \text{const} \equiv 2a.$$

Отсюда

$$u = ar + \frac{b}{r}.$$

Отличные от нуля компоненты тензора деформации (см. формулы (1.8)):

$$u_{rr} = \frac{du}{dr} = a - \frac{b}{r^2}, \quad u_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} = a + \frac{b}{r^2}.$$

[1]) В задачах 4, 5, 7 предполагается, что цилиндры удерживаются при постоянной длине, так что продольная деформация отсутствует.

Из условий $\sigma_{rr} = 0$ при $r = R_2$ и $\sigma_{rr} = -p$ при $r = R_1$ находим

$$a = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E}, \quad b = \frac{pR_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\frac{1+\sigma}{E}.$$

Распределение напряжений по толщине трубы дается формулами

$$\sigma_{rr} = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\left(1 - \frac{R_2^2}{r^2}\right), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2}\left(1 + \frac{R_2^2}{r^2}\right),$$

$$\sigma_{zz} = 2\sigma\frac{pR_1^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

5. Определить деформацию цилиндра, равномерно вращающегося вокруг своей оси.

Решение. Написав в (7.3) центробежную силу $\rho\Omega^2 r$ вместо силы тяжести (Ω — угловая скорость), получаем в цилиндрических координатах для смещения $u_r = u(r)$ уравнение

$$\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d(ru)}{dr}\right) = -\rho\Omega^2 r.$$

Решение, конечное при $r = 0$ и удовлетворяющее условию $\sigma_{rr} = 0$ при $r = R$, есть

$$u = \frac{\rho\Omega^2(1+\sigma)(1-2\sigma)}{8E(1-\sigma)}r[(3-2\sigma)R^2 - r^2].$$

6. Определить деформацию неравномерно нагретого шара со сферически симметричным распределением температуры.

Решение. В сферических координатах уравнение (7.8) для чисто радиальной деформации гласит:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}\frac{d(r^2u)}{dr}\right) = \alpha\frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)}\frac{dT}{dr}.$$

Решение, конечное при $r = 0$ и удовлетворяющее условию $\sigma_{rr} = 0$ при $r = R$, есть

$$u = \alpha\frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)}\left\{\frac{1}{r^2}\int_0^r T(r)r^2\,dr + \frac{2(1-2\sigma)}{1+\sigma}\frac{r}{R^3}\int_0^R T(r)r^2\,dr\right\}.$$

Температура $T(r)$ отсчитывается от значения, при котором равномерно нагретый шар считается недеформированным. В качестве этой температуры здесь выбрана температура внешней поверхности шара, так что $T(R) = 0$.

7. То же для неравномерно нагретого цилиндра с осесимметричным распределением температуры.

Решение. Аналогичным путем в цилиндрических координатах получаем

$$u = \alpha\frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)}\left\{\frac{1}{r}\int_0^r T(r)r\,dr + (1-2\sigma)\frac{r}{R^2}\int_0^R T(r)r\,dr\right\}.$$

8. Определить деформацию неограниченной упругой среды с заданным распределением температуры $T(x, y, z)$ таким, что на бесконечности температура стремится к постоянному значению T_0 и деформация отсутствует.

Решение. Уравнение (7.8) имеет, очевидно, решение, в котором

$$\operatorname{rot}\mathbf{u} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = \alpha\frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)}[T(x,y,z) - T_0].$$

Вектор $\mathbf{u}$, дивергенция которого равна заданной функции, определенной во всем пространстве и обращающейся в нуль на бесконечности, а ротор которого тождественно исчезает, может быть написан, как известно из векторного анализа, в виде

$$\mathbf{u}(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi}\nabla\int\frac{\operatorname{div}'\mathbf{u}(x',y',z')}{r}\,dV',$$

где $r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$. Поэтому получаем общее решение поставленной задачи в виде

$$\mathbf{u} = -\frac{\alpha(1+\sigma)}{12\pi(1-\sigma)}\nabla\int\frac{T'-T_0}{r}\,dV', \tag{1}$$

где $T' \equiv T(x',y',z')$.

Если в очень малом участке объема неограниченной среды (в начале координат) выделяется конечное количество тепла q, то распределение температуры можно написать в виде (C — теплоемкость среды)

$$T - T_0 = \frac{q}{C}\delta(x)\delta(y)\delta(z),$$

где δ обозначает δ-функцию. Интеграл в (1) равен тогда q/Cr, и деформация дается формулой

$$\mathbf{u} = \frac{\alpha(1+\sigma)q}{12\pi(1-\sigma)C}\frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

9. Вывести уравнения равновесия изотропного тела (при отсутствии объемных сил), выраженные через компоненты тензора напряжений.

Решение. Искомая система уравнений содержит наряду с тремя уравнениями

$$\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0 \tag{1}$$

еще уравнения, являющиеся следствием того факта, что шесть различных компонент u_{ik} не являются независимыми величинами. Для вывода этих уравнений пишем сначала систему дифференциальных соотношений, которым удовлетворяют компоненты тензора u_{ik}. Легко видеть, что величины

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$$

тождественно удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial^2 u_{ik}}{\partial x_l\,\partial x_m} + \frac{\partial^2 u_{lm}}{\partial x_i\,\partial x_k} = \frac{\partial^2 u_{il}}{\partial x_k\,\partial x_m} + \frac{\partial^2 u_{km}}{\partial x_i\,\partial x_l}.$$

Здесь имеется всего шесть существенно различных соотношений (соответствующих значениям i, k, l, m: 1122, 1133, 2233, 1123, 2213, 3312); мы сохраним их все, упростив написанное тензорное равенство по индексам l, m:

$$\Delta u_{ik} + \frac{\partial^2 u_{ll}}{\partial x_i\,\partial x_k} = \frac{\partial^2 u_{il}}{\partial x_k\,\partial x_l} + \frac{\partial^2 u_{kl}}{\partial x_i\,\partial x_l}. \tag{2}$$

Подставляя сюда u_{ik}, выраженное через σ_{ik} согласно (5.12), и учитывая (1), получим искомые уравнения

$$(1+\sigma)\Delta\sigma_{ik} + \frac{\partial^2 \sigma_{ll}}{\partial x_i\,\partial x_k} = 0. \tag{3}$$

Эти уравнения остаются в силе и при наличии постоянных вдоль тела внешних объемных сил.

Упростив уравнение (3) по индексам i, k, найдем, что

$$\Delta\sigma_{ll} = 0,$$

т. е. σ_{ll} — гармоническая функция. Применив же теперь к этому уравнению операцию Δ, найдем, что

$$\Delta\Delta\sigma_{ik} = 0,$$

т. е. компоненты σ_{ik} — бигармонические функции; эти результаты следуют, впрочем, уже непосредственно из (7.6) и (7.7) ввиду линейной связи между σ_{ik} и u_{ik}.

10. Выразить общий интеграл уравнений равновесия (при отсутствии объемных сил) через произвольный бигармонический вектор (*Б.Г. Галёркин*, 1930).

Решение. Естественно искать решение уравнения (7.4) в виде

$$\mathbf{u} = \Delta\mathbf{f} + A\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{f}.$$

Отсюда $\mathrm{div}\,\mathbf{u} = (1+A)\,\mathrm{div}\,\Delta\mathbf{f}$. Подставляя это в (7.4), получим

$$(1-2\sigma)\Delta\Delta\mathbf{f} + [2(1-\sigma)A+1]\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\Delta\mathbf{f} = 0.$$

Отсюда видно, что если $\mathbf{f}$ — произвольный бигармонический вектор

$$\Delta\Delta\mathbf{f} = 0,$$

то

$$\mathbf{u} = \Delta\mathbf{f} - \frac{1}{2(1-\sigma)}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{f}.$$

11. Выразить напряжения σ_{rr}, $\sigma_{\varphi\varphi}$, $\sigma_{r\varphi}$ при плоской деформации (в полярных координатах r, φ) в виде производных от функции напряжений.

Решение. Поскольку искомые выражения не могут зависеть от выбора начала отсчета полярного угла φ, то они не содержат его явным образом. Поэтому можно применить следующий прием: преобразуем декартовы производные (7.10) в производные по переменным r, φ, после чего замечаем, что

$$\sigma_{rr} = \sigma_{xx}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{yy}, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{xy} \quad \text{при} \quad \varphi = 0$$

(угол φ отсчитывается от оси x). Таким образом, получим

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial\varphi^2}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2\chi}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial\varphi}\right).$$

12. Определить распределение напряжений в неограниченной упругой среде с шаровой полостью, подвергаемой (на бесконечности) однородной деформации.

Решение. Общая однородная деформация может быть представлена в виде наложения однородного всестороннего растяжения (или сжатия) и однородного сдвига. Первое было рассмотрено в задаче 2, так что достаточно рассмотреть однородный сдвиг.

Пусть $\sigma_{ik}^{(0)}$ — однородное поле напряжений, которое имело бы место во всем пространстве при отсутствии полости; при чистом сдвиге $\sigma_{ii}^{(0)} = 0$. Соответствующий вектор смещения обозначаем как $\mathbf{u}^{(0)}$ и ищем искомое решение в виде $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{u}^{(1)}$, где обусловленная наличием полости функция $\mathbf{u}^{(1)}$ исчезает на бесконечности.

Всякое решение бигармонического уравнения может быть написано в виде линейной комбинации центрально-симметрических решений и их производных различных порядков по координатам. Независимыми центрально-симметрическими решениями являются r^2, r, $1/r$, 1. Поэтому наиболее общий вид, который может иметь бигармонический вектор $\mathbf{u}^{(1)}$, зависящий, как от параметров, только от компонент постоянного тензора $\sigma_{ik}^{(0)}$ и обращающийся в нуль на бесконечности, есть

$$u_i^{(1)} = A\sigma_{ik}^{(0)} \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{r} + B\sigma_{kl}^{(0)} \frac{\partial^3}{\partial x_i\,\partial x_k\,\partial x_l}\frac{1}{r} + C\sigma_{kl}^{(0)} \frac{\partial^3}{\partial x_i\,\partial x_k\,\partial x_l} r. \qquad (1)$$

Подставив это выражение в уравнение (7.4), получим

$$(1-2\sigma)\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l^2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_l} = [2(1-2\sigma)C + (A+2C)]\sigma_{kl}^{(0)} \frac{\partial^3}{\partial x_i\,\partial x_k\,\partial x_l}\frac{1}{r} = 0,$$

откуда

$$A = -4C(1-\sigma).$$

Еще два соотношения между постоянными A, B, C получаются из условия на границе полости:

$$\left(\sigma_{ik}^{(0)} + \sigma_{ik}^{(1)}\right) n_k = 0 \quad \text{при} \quad r = R$$

(R — радиус полости, начало координат выбрано в ее центре, $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{r}$). Довольно длинное вычисление с помощью (1) приводит к следующим значениям:

$$B = \frac{CR^2}{5}, \quad C = \frac{5R^3(1+\sigma)}{2E(7-5\sigma)}.$$

Окончательное выражение для распределения напряжений гласит:

$$\begin{aligned}\sigma_{ik} = \sigma_{ik}^{(0)}\left[1 + \frac{5(1-2\sigma)}{7-5\sigma}\left(\frac{R}{r}\right)^3 + \frac{3}{7-5\sigma}\left(\frac{R}{r}\right)^5\right] + \\ + \frac{15}{7-5\sigma}\left(\frac{R}{r}\right)^3\left[\sigma - \left(\frac{R}{r}\right)^2\right](\sigma_{il}^{(0)} n_k n_l + \sigma_{kl}^{(0)} n_l n_i) + \\ + \frac{15}{2(7-5\sigma)}\left(\frac{R}{r}\right)^3\left[-5 + 7\left(\frac{R}{r}\right)^2\right]\sigma_{lm}^{(0)} n_l n_m n_i n_k + \\ + \frac{15}{2(7-5\sigma)}\left(\frac{R}{r}\right)^3\left[1 - 2\sigma - \left(\frac{R}{r}\right)^2\right]\delta_{ik}\sigma_{lm}^{(0)} n_l n_m.\end{aligned}$$

Для того чтобы получить распределение напряжений при произвольных (не чисто сдвиговых) $\sigma_{ik}^{(0)}$ надо заменить в этом выражении $\sigma_{ik}^{(0)}$ на $\sigma_{ik}^{(0)}$ −

$-\dfrac{1}{3}\delta_{ik}\sigma_{ll}^{(0)}$ и прибавить выражение

$$\frac{1}{3}\sigma_{ll}^{(0)}\left[\delta_{ik}+\frac{R^3}{2r^3}(\delta_{ik}-3n_in_k)\right],$$

соответствующее равномерному однородному растяжению на бесконечности (ср. задачу 2). Выпишем здесь результат, получающийся в общем случае для напряжений на границе полости:

$$\sigma_{ik}=\frac{15}{7-5\sigma}\Big\{(1-\sigma)(\sigma_{ik}^{(0)}-\sigma_{il}^{(0)}n_ln_k-\sigma_{kl}^{(0)}n_ln_i)+\sigma_{lm}^{(0)}n_ln_mn_in_k-\\-\sigma\sigma_{lm}^{(0)}n_ln_m\delta_{ik}+\frac{5\sigma-1}{10}\sigma_{ll}^{(0)}(\delta_{ik}-n_in_k)\Big\}.$$

Вблизи отверстия напряжения значительно превышают напряжения на бесконечности, причем это увеличение напряжений имеет резко выраженный местный характер, быстро убывая с расстоянием (так называемая концентрация напряжений у отверстия). Так, если среда подвергается простому однородному растяжению (отлично от нуля только $\sigma_{zz}^{(0)}$), то наибольшие напряжения будут иметь место на экваторе полости, причем здесь

$$\sigma_{zz}=\frac{27-15\sigma}{2(7-5\sigma)}\sigma_{zz}^{(0)}.$$

§ 8. Равновесие упругой среды, ограниченной плоскостью

Рассмотрим упругую среду, заполняющую бесконечное полупространство, т. е. ограниченную с одной стороны бесконечной плоскостью. Определим деформацию среды под влиянием сил, приложенных к ее свободной поверхности [1]). Распределение этих сил должно удовлетворять только одному условию: они должны исчезать на бесконечности так, чтобы на бесконечности деформация отсутствовала. Для такого случая уравнения равновесия могут быть проинтегрированы в общем виде (*J. Boussinesq*, 1885).

Во всем объеме, занимаемом средой, имеет место уравнение равновесия (7.4)

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}+(1-2\sigma)\Delta\mathbf{u}=0. \tag{8.1}$$

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$\mathbf{u}=\mathbf{f}+\nabla\varphi, \tag{8.2}$$

[1]) Наиболее прямой и стандартный метод решения поставленной задачи заключается в применении к уравнению (8.1) метода Фурье. При этом, однако, приходится вычислять довольно сложные интегралы. Излагаемый ниже метод, основанный на применении ряда искусственных приемов, связан с более простыми вычислениями.

где φ — некоторый скаляр, а вектор $\mathbf{f}$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \mathbf{f} = 0. \tag{8.3}$$

Подстановка (8.2) в (8.1) приводит тогда к следующему уравнению для φ:

$$2(1-\sigma)\Delta\varphi = -\operatorname{div}\mathbf{f}. \tag{8.4}$$

Выберем свободную поверхность упругой среды в качестве плоскости xy; области среды соответствуют положительные z. Напишем функции f_x и f_y в виде производных по z от некоторых функций g_x и g_y:

$$f_x = \frac{\partial g_x}{\partial z}, \quad f_y = \frac{\partial g_y}{\partial z}. \tag{8.5}$$

Поскольку f_x и f_y — гармонические функции, то можно всегда выбрать функции g_x, g_y так, чтобы и они удовлетворяли уравнению Лапласа:

$$\Delta g_x = 0, \quad \Delta g_y = 0, \tag{8.6}$$

Уравнение (8.4) принимает теперь вид

$$2(1-\sigma)\Delta\varphi = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + f_z\right).$$

Имея в виду, что g_x, g_y, f_z — гармонические функции, легко убедиться в том, что удовлетворяющая этому уравнению функция φ может быть написана как

$$\varphi = -\frac{z}{4(1-\sigma)}\left(f_z + \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y}\right) + \psi, \tag{8.7}$$

где ψ — опять гармоническая функция:

$$\Delta\psi = 0. \tag{8.8}$$

Таким образом, задача об определении деформации $\mathbf{u}$ сведена к нахождению функций g_x, g_y, f_z, ψ, которые все удовлетворяют уравнению Лапласа.

Выпишем теперь граничные условия, которые должны выполняться на свободной поверхности среды (на плоскости $z = 0$).

Поскольку единичный вектор внешней нормали $\mathbf{n}$ направлен в отрицательном направлении оси z, то, согласно общей формуле (2.9), должно быть $\sigma_{iz} = -P_i$. Воспользовавшись для σ_{ik} общим выражением (5.11) и выражая компоненты вектора $\mathbf{u}$ через вспомогательные величины g_x, g_y, f_z, ψ, получим после простого

вычисления граничные условия в следующем виде:

$$\left.\frac{\partial^2 g_x}{\partial z^2}\right|_{z=0} + \frac{\partial}{\partial x}\left.\left\{\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} f_z - \frac{1}{2(1-\sigma)}\left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y}\right) + 2\frac{\partial \psi}{\partial z}\right\}\right|_{z=0} = -\frac{2(1+\sigma)}{E} P_x,$$

$$\left.\frac{\partial^2 g_y}{\partial z^2}\right|_{z=0} + \frac{\partial}{\partial y}\left.\left\{\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} f_z - \frac{1}{2(1-\sigma)}\left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y}\right) + 2\frac{\partial \psi}{\partial z}\right\}\right|_{z=0} = -\frac{2(1+\sigma)}{E} P_y, \tag{8.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left.\left\{f_z - \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y}\right) + 2\frac{\partial \psi}{\partial z}\right\}\right|_{z=0} = -\frac{2(1+\sigma)}{E} P_z. \tag{8.10}$$

Компоненты P_x, P_y, P_z внешних сил, приложенных к поверхности, являются заданными функциями координат x, y, обращающимися в нуль на бесконечности.

Формулы, с помощью которых введены вспомогательные величины g_x, g_y, f_z, ψ, не определяют их вполне однозначным образом; в их выборе остается еще некоторый произвол. Поэтому можно наложить на эти величины еще какое-либо произвольное дополнительное условие. В качестве такового удобно потребовать обращения в нуль величины, стоящей в фигурных скобках в уравнениях (8.9) [1]):

$$(1-2\sigma) f_z - \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y}\right) + 4(1-\sigma)\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0. \tag{8.11}$$

Тогда условия (8.9) упрощаются и дают

$$\left.\frac{\partial^2 g_x}{\partial z^2}\right|_{z=0} = -\frac{2(1+\sigma)}{E} P_x, \qquad \left.\frac{\partial^2 g_y}{\partial z^2}\right|_{z=0} = -\frac{2(1+\sigma)}{E} P_y, \tag{8.12}$$

Уравнения (8.10), (8.12) достаточны для полного вычисления гармонических функций g_x, g_y, f_z, ψ.

Для упрощения записи дальнейших формул мы рассмотрим случай, когда на свободную поверхность упругого полупространства действует *сосредоточенная* сила **F**, т. е. сила, приложенная к весьма малому участку поверхности, который можно считать

[1]) Мы не доказываем здесь возможности наложения такого условия, она будет явствовать из того, что в результате мы не придем ни к каким противоречиям.

точечным. Действие этой силы может быть описано как действие поверхностных сил, распределенных по закону

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}\delta(x)\delta(y),$$

где δ обозначает δ-функцию, а начало координат выбрано в точке приложения силы. Зная решение задачи для сосредоточенной силы, можно непосредственно построить решение для произвольного распределения сил $\mathbf{P}(x, y)$. Именно, если

$$u_i = G_{ik}(x, y, z)F_k \tag{8.13}$$

есть деформация под действием сосредоточенной силы $\mathbf{F}$, приложенной в начале координат, то деформация под действием сил $\mathbf{P}(x, y)$ дается интегралом [1])

$$u_i = \iint G_{ik}(x - x', y - y', z)P_k(x', y')\, dx'dy'. \tag{8.14}$$

Из теории потенциала известно, что гармоническая функция f, обращающаяся на бесконечности в нуль и обладающая заданной нормальной производной $\partial f/\partial z$ на плоскости $z = 0$, определяется формулой

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi}\iint \left.\frac{\partial f(x', y', z)}{\partial z}\right|_{z=0} \frac{dx'dy'}{r},$$

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}.$$

Поскольку величины $\partial g_x/\partial z$, $\partial g_y/\partial z$ и величина, стоящая в фигурных скобках в уравнении (8.10), удовлетворяют уравнению Лапласа, а равенства (8.10) и (8.12) как раз определяют значения их нормальных производных на плоскости $z = 0$, имеем

$$f_z - \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y}\right) + 2\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{1+\sigma}{\pi E}\iint \frac{P_z(x', y')}{r}\, dx'dy' = \frac{1+\sigma}{\pi E}\frac{F_z}{r}, \tag{8.15}$$

$$\frac{\partial g_x}{\partial z} = \frac{1+\sigma}{\pi E}\frac{F_x}{r}, \qquad \frac{\partial g_y}{\partial z} = \frac{1+\sigma}{\pi E}\frac{F_y}{r}, \tag{8.16}$$

где теперь $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

В выражения для компонент искомого вектора $\mathbf{u}$ входят не самые величины g_x, g_y, а только их производные по x, y, z. Для вычисления $\partial g_x/\partial x$, $\partial g_y/\partial y$ дифференцируем равенства (8.16) соответственно по x и по y:

$$\frac{\partial^2 g_x}{\partial x\,\partial z} = -\frac{1+\sigma}{\pi E}\frac{F_x x}{r^3}, \qquad \frac{\partial^2 g_y}{\partial y\,\partial z} = -\frac{1+\sigma}{\pi E}\frac{F_y y}{r^3}.$$

---

[1]) Согласно математической терминологии G_{ik} есть тензор Грина для уравнений равновесия полубесконечной среды.

Интегрируя теперь по dz в пределах от ∞ до z, получаем

$$\frac{\partial g_x}{\partial x} = \frac{1+\sigma}{\pi E}\frac{F_x x}{r(r+z)}, \quad \frac{\partial g_y}{\partial y} = \frac{1+\sigma}{\pi E}\frac{F_y y}{r(r+z)}. \tag{8.17}$$

Мы не станем производить здесь дальнейших простых, но довольно громоздких вычислений. Из уравнений (8.11), (8.15) и (8.17) определяем f_z и $\partial\psi/\partial z$. Зная $\partial\psi/\partial z$, легко вычислить $\partial\psi/\partial x$, $\partial\psi/\partial y$, интегрируя сначала по z, а затем дифференцируя по x и по y. Так мы получим все величины, нужные для вычисления вектора деформации согласно (8.2), (8.5), (8.7). В результате получим следующие окончательные формулы:

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{1+\sigma}{2\pi E}\left\{\left[\frac{xz}{r^3} - \frac{(1-2\sigma)x}{r(r+z)}\right]F_z + \frac{2(1-\sigma)r+z}{r(r+z)}F_x + \right.\\
&\qquad\qquad\left. + \frac{[2r(\sigma r+z)+z^2]x}{r^3(r+z)^2}(xF_x + yF_y)\right\},\\
u_y &= \frac{1+\sigma}{2\pi E}\left\{\left[\frac{yz}{r^3} - \frac{(1-2\sigma)y}{r(r+z)}\right]F_z + \frac{2(1-\sigma)r+z}{r(r+z)}F_y + \right.\\
&\qquad\qquad\left. + \frac{[2r(\sigma r+z)+z^2]y}{r^3(r+z)^2}(xF_x + yF_y)\right\},\\
u_z &= \frac{1+\sigma}{2\pi E}\left\{\left[\frac{2(1-\sigma)}{r} + \frac{z^2}{r^3}\right]F_z + \left[\frac{1-2\sigma}{r(r+z)} + \frac{z}{r^3}\right](xF_x + yF_y)\right\}.
\end{aligned} \tag{8.18}$$

В частности, смещение точек самой свободной поверхности среды дается формулами, получающимися отсюда при $z = 0$:

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{1+\sigma}{2\pi E}\frac{1}{r}\left\{-\frac{(1-2\sigma)x}{r}F_z + 2(1-\sigma)F_x + \frac{2\sigma x}{r^2}(xF_x + yF_y)\right\},\\
u_y &= \frac{1+\sigma}{2\pi E}\frac{1}{r}\left\{-\frac{(1-2\sigma)y}{r}F_z + 2(1-\sigma)F_y + \frac{2\sigma y}{r^2}(xF_x + yF_y)\right\},\\
u_z &= \frac{1+\sigma}{2\pi E}\frac{1}{r}\left\{2(1-\sigma)F_z + (1-2\sigma)\frac{1}{r}(xF_x + yF_y)\right\}.
\end{aligned} \tag{8.19}$$

Задача

Определить деформацию неограниченной упругой среды, к малому участку которой приложена сила $\mathbf{F}$ (*W. Thomson*, 1848) [1].

Решение. Рассматривая деформацию на расстояниях r, больших по сравнению с размерами участка приложения силы, мы можем считать, что

[1]) Аналогичная задача для произвольной неограниченной анизотропной среды решена *И.М. Лифшицем* и *Л.Н. Розенцвейгом* (ЖЭТФ. 1947. Т. 17. С. 783).

сила приложена в точке. Уравнение равновесия гласит (ср. (7.2)):

$$\Delta\mathbf{u} + \frac{1}{1-2\sigma}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} = -\frac{2(1+\sigma)}{E}\mathbf{F}\delta(\mathbf{r}) \tag{1}$$

(где $\delta(\mathbf{r}) \equiv \delta(x)\delta(y)\delta(z)$, а начало координат выбрано в точке приложения силы). Ищем решение в виде $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$, где $\mathbf{u}_0$ удовлетворяет уравнению типа Пуассона:

$$\Delta\mathbf{u}_0 = -\frac{2(1+\sigma)}{E}\mathbf{F}\delta(\mathbf{r}). \tag{2}$$

Соответственно для $\mathbf{u}_1$ получим уравнение

$$\nabla\operatorname{div}\mathbf{u}_1 + (1-2\sigma)\Delta\mathbf{u}_1 = -\nabla\operatorname{div}\mathbf{u}_0. \tag{3}$$

Обращающееся на бесконечности в нуль решение уравнения (2) есть

$$\mathbf{u}_0 = \frac{1+\sigma}{2\pi E}\frac{\mathbf{F}}{r}.$$

Применив к уравнению (3) операцию rot, получим $\Delta\operatorname{rot}\mathbf{u}_1 = 0$. На бесконечности должно быть $\operatorname{rot}\mathbf{u}_1 = 0$. Но функция, гармоническая во всем пространстве и обращающаяся в нуль на бесконечности, равна нулю тождественно. Таким образом, $\operatorname{rot}\mathbf{u}_1 = 0$ и соответственно этому можно писать $\mathbf{u}_1$ в виде $\mathbf{u}_1 = \operatorname{grad}\varphi$. Из (3) получаем

$$\nabla\{2(1-\sigma)\Delta\varphi + \operatorname{div}\mathbf{u}_0\} = 0.$$

Отсюда следует, что стоящая в скобках величина есть постоянная, и поскольку она должна исчезать на бесконечности, то во всем пространстве

$$\Delta\varphi = -\frac{\operatorname{div}\mathbf{u}_0}{2(1-\sigma)} = -\frac{1+\sigma}{4\pi E(1-\sigma)}\mathbf{F}\nabla\frac{1}{r}.$$

Если ψ — решение уравнения $\Delta\psi = 1/r$, то

$$\varphi = -\frac{1+\sigma}{4\pi E(1-\sigma)}\mathbf{F}\nabla\psi.$$

Выбрав не имеющее особенностей решение $\psi = r/2$, получим

$$\mathbf{u}_1 = \nabla\varphi = \frac{1+\sigma}{8\pi E(1-\sigma)}\frac{(\mathbf{F}\mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{F}}{r},$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении радиус-вектора $\mathbf{r}$. Окончательно имеем

$$\mathbf{u} = \frac{1+\sigma}{8\pi E(1-\sigma)}\frac{(3-4\sigma)\mathbf{F} + \mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{F})}{r}.$$

Представив эту формулу в виде (8.13), получим тензор Грина уравнений равновесия неограниченной изотропной среды [1]):

$$G_{ik} = \frac{1+\sigma}{8\pi E(1-\sigma)}[(3-4\sigma)\delta_{ik} + n_i n_k]\frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi\mu}\left[\frac{\delta_{ik}}{r} - \frac{1}{4(1-\sigma)}\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_k}r\right].$$

[1]) Тот факт, что компоненты тензора G_{ik} — однородные функции первого порядка от координат x, y, z, заранее очевиден из соображений однородности в связи с видом уравнения (1), в левой части которого стоит линейная комбинация вторых производных от компонент вектора $\mathbf{u}$, а в правой — однородная функция третьего порядка ($\delta(a\mathbf{r}) = a^{-3}\delta(\mathbf{r})$). Это свойство остается и в общем случае произвольной анизотропной среды.

§ 9. Соприкосновение твердых тел

Пусть два твердых тела соприкасаются друг с другом в точке, не являющейся особой точкой их поверхностей (на рис. 1 *а* изображен разрез через обе поверхности вблизи точки соприкосновения O). В этой точке обе поверхности имеют общую касательную плоскость, которую мы выберем в качестве плоскости xy. Положительное же направление оси z условимся считать различным для обоих тел, — для каждого из них будем отсчитывать z-координату по направлению в глубь тела, обозначая ее соответственно как z и z'.

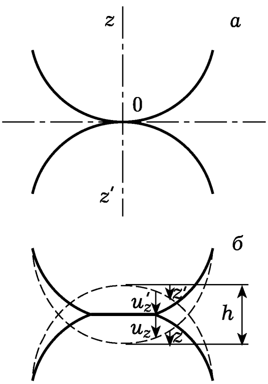


Рис. 1

Как известно, вблизи обыкновенной точки касания координатной плоскости (плоскости xy) уравнение поверхности может быть написано в виде

$$z = \varkappa_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta, \tag{9.1}$$

где по дважды повторяющимся индексам α, β подразумевается суммирование по значениям 1, 2 ($x_1 = x$, $x_2 = y$), а $\varkappa_{\alpha\beta}$ есть двумерный симметрический тензор, характеризующий кривизну поверхности (главные значения тензора $\varkappa_{\alpha\beta}$ равны $1/2R_1$ и $1/2R_2$, где R_1, R_2 — главные радиусы кривизны поверхности в точке касания). Аналогичное соотношение для поверхности второго тела вблизи точки соприкосновения напишем в виде

$$z' = \varkappa'_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta. \tag{9.2}$$

Предположим теперь, что оба тела сдавливаются приложенными к ним силами, в результате чего они сближаются на некоторое малое расстояние h [1]).

Тогда вблизи точки первоначального соприкосновения на поверхности тел возникает вмятина, и тела будут соприкасаться уже не в одной точке, а по некоторому малому, но конечному участку их поверхности. Пусть u_z и u'_z — компоненты (соответственно по осям z и z') векторов смещения точек поверхностей обоих тел при сдавливании. На рис. 1 *б* штриховыми линиями изображены поверхности тел, какими они были бы при отсутствии деформации, а сплошной линией — поверхности сдавленных тел; буквы z и z' обозначают длины, определяемые равен-

[1]) Излагаемая так называемая *контактная задача* теории упругости была впервые решена *Герцем* (*H. Hertz*, 1882).

ствами (9.1) и (9.2). Как непосредственно видно из рисунка, во всех точках области соприкосновения имеет место равенство

$$(z + u_z) + (z' + u'_z) = h,$$

или

$$(\varkappa_{\alpha\beta} + \varkappa'_{\alpha\beta})x_\alpha x_\beta + u_z + u'_z = h. \tag{9.3}$$

В точках же вне этой области, где обе поверхности не соприкасаются, имеет место неравенство $z + z' + u_z + u'_z < h$.

Выберем направления осей x, y таким образом, чтобы тензор $\varkappa_{\alpha\beta} + \varkappa'_{\alpha\beta}$ был приведен к главным осям. Обозначая главные значения этого тензора через A и B, перепишем равенство (9.3) в виде

$$Ax^2 + By^2 + u_z + u'_z = h. \tag{9.4}$$

Величины A и B связаны с радиусами кривизны R_1, R_2 и R'_1, R'_2 обеих поверхностей следующими формулами, которые приведем без вывода:

$$2(A + B) = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2},$$

$$4(A - B)^2 = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R'_2}\right)^2 + \\ + 2\cos 2\varphi \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\left(\frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R'_2}\right),$$

где φ — угол между теми нормальными сечениями поверхностей, в которых радиусы кривизны — R_1 и R'_1. Знаки радиусов кривизны предполагаются положительными, если соответствующие центры кривизны расположены внутри соответствующего тела, и отрицательными — в обратном случае.

Обозначим через $P_z(x, y)$ давление между обоими сдавленными телами в точках их соприкосновения (вне области соприкосновения, разумеется, $P_z = 0$). При определении зависимости между P_z и смещениями u_z, u'_z можно с достаточной точностью рассматривать поверхности тел как плоские и воспользоваться полученными в предыдущем параграфе формулами. Согласно третьей из формул (8.19) (учитывая также (8.14)) смещение u_z под влиянием нормальных сил $P_z(x, y)$ определяется выражениями

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{1 - \sigma^2}{\pi E} \iint \frac{P_z(x', y')}{r}\, dx'dy', \\ u'_z &= \frac{1 - \sigma'^2}{\pi E'} \iint \frac{P_z(x', y')}{r}\, dx'dy' \end{aligned} \tag{9.5}$$

(σ, σ' и E, E' — коэффициенты Пуассона и модули растяжения обоих тел); поскольку вне области соприкосновения $P_z = 0$, то интегрирование производится здесь только по этой области. Заметим, что из этих формул следует, что отношение u_z/u'_z постоянно и равно

$$\frac{u_z}{u'_z} = \frac{(1-\sigma^2)E'}{(1-\sigma'^2)E}. \tag{9.6}$$

Соотношения (9.4) и (9.6) вместе непосредственно определяют распределение деформации u_z, u'_z по области соприкосновения (сами же формулы (9.5) и (9.6) относятся, конечно, и к точкам вне этой области).

Подставив выражения (9.5) в (9.4), получим

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\sigma^2}{E} + \frac{1-\sigma'^2}{E'}\right)\iint \frac{P_z(x',y')}{r}\,dx'dy' = h - Ax^2 - By^2. \tag{9.7}$$

Это интегральное уравнение определяет распределение давления P_z по области соприкосновения. Его решение может быть найдено из аналогии со следующими известными из теории потенциала соотношениями. На мысль воспользоваться этой аналогией наводит тот факт, что, во-первых, интеграл, стоящий в левой части уравнения (9.7), — типа обычных в теории потенциала интегралов, определяющих потенциал, создаваемый некоторым распределением зарядов, и, во-вторых, что потенциал поля внутри равномерно заряженного эллипсоида есть квадратичная функция координат.

Если по объему трехосного эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

равномерно распределен заряд (с постоянной объемной плотностью ρ), то потенциал поля внутри эллипсоида определяется выражением

$$\varphi(x,y,z) = \\ = \pi\rho abc\int_0^\infty \left\{1 - \frac{x^2}{a^2+\xi} - \frac{y^2}{b^2+\xi} - \frac{z^2}{c^2+\xi}\right\}\frac{d\xi}{\sqrt{(a^2+\xi)(b^2+\xi)(c^2+\xi)}}.$$

В предельном случае сильно уплощенного (в направлении оси z) эллипсоида, что соответствует $c \to 0$, получим отсюда

$$\varphi(x,y) = \pi\rho abc\int_0^\infty \left\{1 - \frac{x^2}{a^2+\xi} - \frac{y^2}{b^2+\xi}\right\}\frac{d\xi}{\sqrt{(a^2+\xi)(b^2+\xi)\xi}}$$

(при переходе к пределу $c \to 0$ надо, разумеется, положить равной нулю также и координату z точек внутри эллипсоида). С другой стороны, потенциал $\varphi(x, y, z)$ может быть написан в виде интеграла

$$\varphi(x, y, z) = \iiint \frac{\rho dx' dy' dz'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}},$$

где интегрирование производится по объему эллипсоида. Переходя здесь к пределу $c \to 0$, мы должны положить под корнем $z = z' = 0$; производя интегрирование по dz' в пределах между $\pm c \left(1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}\right)^{1/2}$, получим

$$\varphi(x, y) = 2\rho c \iint \frac{dx' dy'}{r} \sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}}$$

$$\left(r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}\right),$$

где интегрирование производится по площади внутри эллипса $x'^2/a^2 + y'^2/b^2 = 1$. Приравнивая оба выражения для $\varphi(x, y)$, получим следующее тождество:

$$\iint \frac{dx' dy'}{r} \sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}} =$$

$$= \frac{\pi ab}{2} \int_0^\infty \left\{1 - \frac{x^2}{a^2 + \xi} - \frac{y^2}{b^2 + \xi}\right\} \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)\xi}}. \quad (9.8)$$

Сравнивая это соотношение с уравнением (9.7), мы видим, что в их правых частях стоят квадратичные функции от x и y одинакового вида, а в левых — интегралы одинакового типа. Поэтому мы можем сразу заключить, что область соприкосновения тел (т. е. область интегрирования в интеграле в (9.7)) ограничена эллипсом вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (9.9)$$

и что функция $P_z(x, y)$ должна быть вида

$$P_z(x, y) = \text{const} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Выбирая const так, чтобы интеграл $\iint P_z \, dx \, dy$ по области соприкосновения был равен заданной полной силе F, с которой

сдавливаются оба тела, получим

$$P_z(x,y) = \frac{3F}{2\pi ab}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}. \tag{9.10}$$

Эта формула определяет закон распределения давления по площади области соприкосновения. Отметим, что давление в центре области в полтора раза превышает среднее давление $F/(\pi ab)$.

Подставив (9.10) в уравнение (9.7) и заменив получающийся в нем интеграл его выражением согласно (9.8), получим

$$\frac{FD}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-x^2/(a^2+\xi)-y^2/(b^2+\xi)}{\sqrt{(a^2+\xi)(b^2+\xi)\xi}}\,d\xi = h - Ax^2 - By^2,$$

где

$$D = \frac{3}{4}\left(\frac{1-\sigma^2}{E}+\frac{1-\sigma'^2}{E'}\right).$$

Это равенство должно выполняться тождественно при всех значениях x, y (внутри эллипса (9.9)); поэтому должны быть попарно равны в отдельности коэффициенты при x и y и свободные члены в обеих частях. Отсюда находим следующие соотношения:

$$h = \frac{FD}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2+\xi)(b^2+\xi)\xi}}, \tag{9.11}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{FD}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\xi}{(a^2+\xi)\sqrt{(a^2+\xi)(b^2+\xi)\xi}}, \\ B &= \frac{FD}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\xi}{(b^2+\xi)\sqrt{(a^2+\xi)(b^2+\xi)\xi}}. \end{aligned} \tag{9.12}$$

Уравнения (9.12) определяют полуоси a и b области соприкосновения по заданной силе F (A и B — известные для данных тел величины). После этого соотношение (9.11) определит зависимость между силой F и вызываемым ею сближением тел h. Интегралы, стоящие в правых частях этих уравнений, эллиптические.

Таким образом, задачу о соприкосновении тел можно считать полностью решенной. Форма поверхности тел (т. е. смещения u_z, u'_z) вне области соприкосновения определяется теми же формулами (9.5), (9.10), причем значения интегралов можно сразу определить, исходя из аналогии с потенциалом поля заряженного эллипсоида, — на этот раз вне его. Наконец, по формулам

предыдущего параграфа можно было бы определить также и распределение деформации по объему тел (но, конечно, лишь на расстояниях, малых по сравнению с размерами тела).

Применим полученные формулы к соприкосновению двух шаров с радиусами R и R'. Здесь

$$A = B = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right);$$

из соображений симметрии ясно, что будет и $a = b$, т. е. область соприкосновения есть круг. Из (9.12) получим для радиуса a области соприкосновения значение

$$a = F^{1/3}\left(D\frac{RR'}{R+R'}\right)^{1/3}. \tag{9.13}$$

В данном случае h есть разность между суммой $R + R'$ и расстоянием между центрами шаров. Из (9.10) получим следующее соотношение между F и h:

$$h = F^{2/3}\left[D^2\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\right]^{1/3}. \tag{9.14}$$

Отметим, что h пропорционально степени $F^{2/3}$ сдавливающей силы; обратно, сила F пропорциональна степени $h^{3/2}$ производимого ею сближения тел. Напишем еще потенциальную энергию U соприкасающихся шаров. Замечая, что должно быть $(-F) = -\partial U/\partial h$, получим

$$U = h^{5/2}\frac{2}{5D}\left(\frac{RR'}{R+R'}\right)^{1/2}. \tag{9.15}$$

Наконец, укажем, что зависимость вида

$$h = \mathrm{const}\cdot F^{2/3}, \quad F = \mathrm{const}\cdot h^{3/2}$$

имеет место не только для шаров, но и при соприкосновении других тел конечных размеров. В этом легко убедиться из соображений подобия. Если произвести замену $a^2 \to \alpha a^2$, $b^2 \to \alpha b^2$, $F \to \alpha^{3/2}F$, где α — произвольная постоянная, то уравнения (9.12) останутся неизменными. В уравнении же (9.11) правая часть умножится на α, и для того чтобы оно осталось неизменным, надо заменить h на αh. Отсюда и следует, что F должно быть пропорционально $h^{3/2}$.

Задачи

1. Определить время, в течение которого соприкасаются два сталкивающихся упругих шара.

Решение. В системе отсчета, в которой центр инерции обоих шаров покоится, энергия шаров до столкновения равна кинетической энергии относительно движения $\mu v^2/2$, где v — относительная скорость сталкивающихся шаров, а $\mu = m_1 m_2/(m_1+m_2)$ — их приведенная масса. В течение столкновения полная энергия равна сумме кинетической энергии, которую можно написать в виде $\mu\dot{h}^2/2$, и потенциальной энергии (9.15). В силу закона сохранения энергии имеем

$$\mu\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + kh^{5/2} = \mu v^2, \quad k = \frac{4}{5D}\left(\frac{RR'}{R+R'}\right)^{1/2}.$$

Максимальное сближение шаров h_0 соответствует моменту, когда их относительная скорость $\dot{h}$ обращается в нуль, и равно

$$h_0 = \left(\frac{\mu}{k}\right)^{2/5} v^{4/5}.$$

Время τ, в течение которого длится столкновение (т. е. h меняется от 0 до h_0 и обратно до нуля), равно

$$\tau = 2\int\limits_0^{h_0} \frac{dh}{(v^2 - kh^{5/2}/\mu)^{1/2}} = 2\left(\frac{\mu^2}{k^2 v}\right)^{1/5}\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2/5}}},$$

или

$$\tau = \frac{4\sqrt{\pi}\,\Gamma(2/5)}{5\Gamma(9/10)}\left(\frac{\mu^2}{k^2 v}\right)^{1/5} = 2,94\left(\frac{\mu^2}{k^2 v}\right)^{1/5}.$$

Пользуясь при решении этой задачи полученными в тексте статическими формулами, мы тем самым пренебрегаем упругими колебаниями шара, возникающими при столкновении. Возможность такого пренебрежения требует, чтобы скорость v была достаточно мала по сравнению со скоростью звука. Фактически, однако, применимость этой теории ограничивается еще раньше благодаря тому, что возникающие при столкновении деформации переходят за предел упругости вещества.

2. Определить размеры области соприкосновения и распределение давления в ней при сдавливании двух цилиндров вдоль их образующих.

Решение. Область соприкосновения представляет собой в этом случае узкую полоску вдоль длины цилиндров. Ее ширину $2a$ и распределение давления в ней можно найти из полученных в тексте формул путем предельного перехода $b/a \to \infty$. Распределение давления будет функцией вида

$$P_z(x) = \text{const}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

(x — координата вдоль ширины полосы соприкосновения); нормируя ее на отнесенную к единице длины цилиндров сдавливающую силу F, получим

$$P_z(x) = \frac{2F}{\pi\alpha}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}.$$

Подставляя это выражение в (9.7) и производя интегрирование с помощью (9.8), имеем

$$A = \frac{4DF}{3\pi}\int\limits_0^\infty \frac{d\xi}{(a^2+\xi)^{3/2}\xi} = \frac{8DF}{3\pi a^2}.$$

Один из радиусов кривизны цилиндрической поверхности бесконечен, а другой совпадает с радиусом цилиндра; поэтому в данном случае

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right), \quad B = 0.$$

Окончательно находим для искомой ширины полосы соприкосновения:

$$a = \left(\frac{16DF}{3\pi}\,\frac{RR'}{R+R'}\right)^{1/2}.$$

§ 10. Упругие свойства кристаллов

Изменение свободной энергии при изотермическом сжатии кристалла является, как и у изотропных тел, квадратичной функцией тензора деформации. В противоположность тому, что имело место для изотропных тел, эта функция содержит теперь не два, а большее число независимых коэффициентов.

Общий вид свободной энергии деформированного кристалла есть

$$F = \frac{1}{2}\lambda_{iklm}u_{ik}u_{lm}, \tag{10.1}$$

где λ_{iklm} есть некоторый тензор 4-го ранга, называемый *тензором модулей упругости*. Поскольку тензор деформации симметричен, то произведение $u_{ik}u_{lm}$ не меняется при перестановке индексов i с k, l с m или пары i, k с парой l, m. Очевидно поэтому, что и тензор λ_{iklm} может быть определен так, чтобы он обладал такими же свойствами симметрии по отношению к перестановке индексов:

$$\lambda_{iklm} = \lambda_{kilm} = \lambda_{ikml} = \lambda_{lmik}. \tag{10.2}$$

Путем простого подсчета можно убедиться в том, что число различных компонент тензора 4-го ранга, обладающего такими свойствами симметрии, равно в общем случае 21 [1]).

Соответственно выражению (10.1) для свободной энергии зависимость тензора напряжений от тензора деформации имеет в кристаллах вид (ср. также сноску на с. 61)

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial F}{\partial u_{ik}} = \lambda_{iklm}u_{lm}. \tag{10.3}$$

[1]) В литературе используются также обозначения, в которых компоненты тензора 4-го ранга записываются как $\lambda_{\alpha\beta}$ с двумя индексами, пробегающими значения 1, 2, 3, 4, 5, 6, которым отвечают соответственно пары индексов xx, yy, zz, yz, zx, xy.

Наличие той или иной симметрии кристалла приводит к появлению зависимостей между различными компонентами тензора λ_{iklm}, так что число его независимых компонент оказывается меньшим, чем 21.

Рассмотрим эти соотношения для всех возможных типов макроскопической симметрии кристаллов, т. е. для всех кристаллических классов, распределив их по соответствующим кристаллическим системам (см. V, § 130, 131).

1. Триклинная система. Триклинная симметрия (классы $\boldsymbol{C}_1$ и $\boldsymbol{C}_i$) не накладывает никаких ограничений на компоненты тензора λ_{iklm}, а выбор системы координат с точки зрения симметрии вполне произволен. При этом отличны от нуля и независимы все 21 модуль упругости. Произвольность выбора системы координат позволяет, однако, наложить на компоненты тензора λ_{iklm} дополнительные условия. Поскольку ориентация системы координат относительно тела определяется тремя величинами (углами поворота), то таких условий может быть три; можно, например, три из компонент считать равными нулю. Тогда независимыми величинами, характеризующими упругие свойства кристалла, будут 18 отличных от нуля модулей и 3 угла, определяющих ориентацию осей в кристалле.

2. Моноклинная система. Рассмотрим класс $\boldsymbol{C}_s$; выбираем систему координат с плоскостью xy, совпадающей с плоскостью симметрии. При отражении в этой плоскости координаты подвергаются преобразованию: $x \to x$, $y \to y$, $z \to -z$. Компоненты тензора преобразуются как произведения соответствующих координат. Поэтому ясно, что при указанном преобразовании все компоненты λ_{iklm}, среди индексов которых индекс z содержится нечетное (1 или 3) число раз, переменят свой знак, а остальные компоненты останутся неизменными. С другой стороны, в силу симметрии кристалла все характеризующие его свойства величины (в том числе и все компоненты λ_{iklm}) должны остаться неизменными при отражении в плоскости симметрии. Поэтому ясно, что все компоненты с нечетным числом индексов z должны быть равными нулю. Соответственно этому общее выражение для свободной упругой энергии кристалла моноклинной системы есть

$$F = \frac{1}{2}\lambda_{xxxx}u_{xx}^2 + \frac{1}{2}\lambda_{yyyy}u_{yy}^2 + \frac{1}{2}\lambda_{zzzz}u_{zz}^2 + \lambda_{xxyy}u_{xx}u_{yy} +$$
$$+ \lambda_{xxzz}u_{xx}u_{zz} + \lambda_{yyzz}u_{yy}u_{zz} + 2\lambda_{xyxy}u_{xy}^2 + 2\lambda_{xzxz}u_{xz}^2 + 2\lambda_{yzyz}u_{yz}^2 +$$
$$+ 2\lambda_{xxxy}u_{xx}u_{xy} + 2\lambda_{yyyx}u_{yy}u_{yx} + 2\lambda_{xyzz}u_{xy}u_{zz} + 4\lambda_{xzyz}u_{xz}u_{yz}. \tag{10.4}$$

В этом выражении 13 независимых коэффициентов. Такое же выражение получается для класса $\boldsymbol{C}_2$, а также и класса $\boldsymbol{C}_{2h}$, содержащего оба элемента симметрии (C_2 и σ_h) вместе. В изложен-

ных рассуждениях, однако, соображения симметрии фиксируют выбор направления лишь одной из осей координат (z), направления же осей x, y в перпендикулярной плоскости остаются произвольными. Этим произволом можно воспользоваться для того, чтобы надлежащим выбором осей обратить в нуль одну из компонент, скажем λ_{xyzz}. Тогда 13 величинами, характеризующими упругие свойства кристалла, будут 12 отличных от нуля модулей и один угол, определяющий ориентацию осей в плоскости xy.

3. Ромбическая система. Во всех классах этой системы ($\boldsymbol{C}_{2v}$, $\boldsymbol{D}_2$, $\boldsymbol{D}_{2h}$) выбор осей координат однозначно диктуется симметрией и для свободной энергии получается выражение одинакового вида. Рассмотрим, например, класс $\boldsymbol{D}_{2h}$ и выберем плоскости координат в трех плоскостях симметрии этого класса. Отражения в каждой из этих плоскостей представляют собой преобразования, при которых одна из координат меняет знак, а две другие не меняются. Очевидно, поэтому, что из всех компонент λ_{iklm} отличными от нуля останутся только те, среди индексов которых каждое из их значений x, y и z встречается четное число раз; все остальные компоненты должны были бы менять знак при отражении в какой-нибудь из плоскостей симметрии. Таким образом, общее выражение для свободной энергии имеет в ромбической системе вид

$$F = \frac{1}{2}\lambda_{xxxx}u_{xx}^2 + \frac{1}{2}\lambda_{yyyy}u_{yy}^2 + \frac{1}{2}\lambda_{zzzz}u_{zz}^2 + \lambda_{xxyy}u_{xx}u_{yy} + \\ + \lambda_{xxzz}u_{xx}u_{zz} + \lambda_{yyzz}u_{yy}u_{zz} + 2\lambda_{xyxy}u_{xy}^2 + 2\lambda_{xzxz}u_{xz}^2 + 2\lambda_{yzyz}u_{yz}^2. \tag{10.5}$$

Оно содержит всего девять модулей упругости.

4. Тетрагональная система. Рассмотрим класс $\boldsymbol{C}_{4v}$. Выбираем координаты с осью z по оси C_4, а оси x, y — перпендикулярными к двум из вертикальных плоскостей симметрии. Отражения в этих двух плоскостях означают соответственно преобразования $x \to -x$, $y \to y$, $z \to z$ и $x \to x$, $y \to -y$, $z \to z$; в силу этого исчезают все компоненты λ_{iklm} с нечетным числом одинаковых индексов. Далее, поворот на угол $\pi/4$ вокруг оси C_4 представляет собой преобразование $x \to y$, $y \to -x$, $z \to z$. Отсюда вытекают соотношения

$$\lambda_{xxxx} = \lambda_{yyyy}, \quad \lambda_{xxzz} = \lambda_{yyzz}, \quad \lambda_{xzxz} = \lambda_{yzyz}.$$

Остальные преобразования, входящие в класс $\boldsymbol{C}_{4v}$, ничего не добавляют к этим условиям. Таким образом, выражение для свободной энергии кристаллов тетрагональной системы имеет вид

$$F = \frac{1}{2}\lambda_{xxxx}(u_{xx}^2 + u_{yy}^2) + \frac{1}{2}\lambda_{zzzz}u_{zz}^2 + \lambda_{xxzz}(u_{xx}u_{zz} + u_{yy}u_{zz}) + \\ + \lambda_{xxyy}u_{xx}u_{yy} + 2\lambda_{xyxy}u_{xy}^2 + 2\lambda_{xzxz}(u_{xz}^2 + u_{yz}^2). \tag{10.5}$$

Оно содержит шесть модулей упругости.

Такой же результат получится и для других классов тетрагональной системы, в которых естественный выбор осей координат диктуется симметрией ($\boldsymbol{D}_{2d}$, $\boldsymbol{D}_4$, $\boldsymbol{D}_{4h}$). В классах же $\boldsymbol{C}_4$, $\boldsymbol{S}_4$, $\boldsymbol{C}_{4h}$ однозначен выбор лишь одной оси (z) — вдоль оси C_4 или S_4. При этом требования симметрии допускают существование (помимо фигурирующих в (10.6)) еще и компонент

$$\lambda_{xxxy} = -\lambda_{yyyx}.$$

Надлежащим выбором направлений осей x, y эти компоненты могут быть обращены в нуль, и тогда F снова приведется к тому же виду (10.6).

5. Ромбоэдрическая система. Рассмотрим класс $\boldsymbol{C}_{3v}$ и выберем систему координат с осью z вдоль оси третьего порядка и осью y, перпендикулярной к одной из вертикальных плоскостей симметрии. Для выяснения ограничений, налагаемых на компоненты тензора λ_{iklm} наличием оси C_3, удобно произвести формальное преобразование, введя комплексные «координаты» ξ, η согласно определению

$$\xi = x + iy, \quad \eta = x - iy; \tag{10.7}$$

координату же z оставляем без изменений. К этим новым координатам преобразуем также и тензор λ_{iklm}; в его компонентах индексы пробегают теперь значения ξ, η, z. Легко видеть, что при повороте на 120° вокруг оси z новые переменные подвергаются преобразованию

$$\xi \to \xi e^{2\pi i/3}, \quad \eta \to \eta e^{-2\pi i/3}, \quad z \to z.$$

Отличными от нуля могут быть в силу симметрии кристалла только те из компонент λ_{iklm}, которые не меняются при этом преобразовании. Очевидно, что этим свойством обладают те компоненты, среди индексов которых три раза повторяются ξ или η (обращаем внимание на то, что $(e^{2\pi i/3})^3 = e^{2\pi i} = 1$), или индекс ξ содержится столько же раз, сколько η (поскольку $e^{2\pi i/3}e^{-2\pi i/3} = 1$); таковыми являются компоненты

$$\lambda_{zzzz},\ \lambda_{\xi\eta\xi\eta},\ \lambda_{\xi\xi\eta\eta},\ \lambda_{\xi\eta zz},\ \lambda_{\xi z\eta z},\ \lambda_{\xi\xi\xi z},\ \lambda_{\eta\eta\eta z}.$$

Далее, отражение в плоскости симметрии, перпендикулярной к оси y, есть преобразование $x \to x$, $y \to -y$, $z \to z$, или для величин ξ, η: $\xi \to \eta$, $\eta \to \xi$. Поскольку при этом преобразовании $\lambda_{\xi\xi\xi z}$ переходит в $\lambda_{\eta\eta\eta z}$, то эти две компоненты должны быть равны друг другу. Таким образом, кристаллы ромбоэдрической системы обладают всего шестью модулями упругости. Для того чтобы написать выражение для свободной энергии, надо составить сумму $\lambda_{iklm}u_{ik}u_{lm}$, в которой индексы пробегают значения ξ, η, z; поскольку нам надо выразить F через компоненты тензора деформации в координатах x, y, z, то мы должны выразить через

них компоненты в «координатах» ξ, η, z. Это легко сделать, воспользовавшись тем, что компоненты тензора u_{ik} преобразуются как произведения соответствующих двух координат. Так, из

$$\xi\xi = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

следует, что

$$u_{\xi\xi} = u_{xx} - u_{yy} + 2iu_{xy}.$$

В результате находим для F следующее выражение:

$$F = \frac{1}{2}\lambda_{zzzz}u_{zz}^2 + 2\lambda_{\xi\eta\xi\eta}(u_{xx}+u_{yy})^2 + \lambda_{\xi\xi\eta\eta}[(u_{xx}-u_{yy})^2 + 4u_{xy}^2] + \\ + 2\lambda_{\xi\eta zz}(u_{xx}+u_{yy})u_{zz} + 4\lambda_{\xi z\eta z}(u_{xz}^2 + u_{yz}^2) + \\ + 4\lambda_{\xi\xi\xi z}[(u_{xx}-u_{yy})u_{xz} - 2u_{xy}u_{yz}]. \quad (10.8)$$

Оно содержит 6 независимых коэффициентов. Такой же результат получится для классов $\boldsymbol{D}_3$ и $\boldsymbol{D}_{3d}$. В классах же $\boldsymbol{C}_3$ и $\boldsymbol{S}_6$, в которых выбор осей x, y остается произвольным, требования симметрии допускают также и отличную от нуля разность

$$\lambda_{\xi\xi\xi z} - \lambda_{\eta\eta\eta z}.$$

Она, однако, может быть обращена в нуль надлежащим выбором осей x, y.

6. Гексагональная система. Рассмотрим класс $\boldsymbol{C}_6$ и выберем систему координат с осью z по оси 6-го порядка. Введем снова координаты (10.7). При повороте на угол $2\pi/6$ вокруг оси z они подвергаются преобразованию

$$\xi \to \xi e^{2\pi i/6}, \quad \eta \to \eta e^{-2\pi i/6}.$$

Отсюда видно, что отличны от нуля только те компоненты λ_{iklm}, среди индексов которых индексы ξ и η встречаются одинаковое число раз. Таковыми являются

$$\lambda_{zzzz},\ \lambda_{\xi\eta\xi\eta},\ \lambda_{\xi\xi\eta\eta},\ \lambda_{\xi\eta zz},\ \lambda_{\xi z\eta z}.$$

Другие возможные элементы симметрии гексагональной системы ничего не добавляют к этим ограничениям. Таким образом, имеется всего пять модулей упругости. Свободная энергия имеет вид

$$F = \frac{1}{2}\lambda_{zzzz}u_{zz}^2 + 2\lambda_{\xi\eta\xi\eta}(u_{xx}+u_{yy})^2 + \lambda_{\xi\xi\eta\eta}[(u_{xx}-u_{yy})^2 + 4u_{xy}^2] + \\ + 2\lambda_{\xi\eta zz}u_{zz}(u_{xx}+u_{yy}) + 4\lambda_{\xi z\eta z}(u_{xz}^2 + u_{yz}^2). \quad (10.9)$$

Следует отметить, что деформация в плоскости xy (деформация с отличными от нуля u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}) определяется всего двумя упругими модулями, как и для изотропного тела; другими словами, в плоскости, перпендикулярной к гексагональной оси,

упругие свойства гексагонального кристалла изотропны. По этой причине выбор направлений осей в этой плоскости вообще несуществен и никак не отражается на виде F. Выражение (10.9) относится поэтому ко всем классам гексагональной системы.

7. Кубическая система. Направим оси x, y, z по трем осям 4-го порядка кубической системы. Уже наличие тетрагональной симметрии (с осью 4-го порядка вдоль оси z) ограничивало число различных компонент тензора λ_{iklm} следующими шестью:

$$\lambda_{xxxx},\ \lambda_{zzzz},\ \lambda_{xxzz},\ \lambda_{xxyy},\ \lambda_{xyxy},\ \lambda_{xzxz}.$$

Повороты на 90° вокруг осей x и y дают соответственно преобразования $x \to x$, $y \to -z$, $z \to y$ и $x \to z$, $y \to y$, $z \to -x$. В силу них из написанных шести компонент делаются равными первая со второй, третья с четвертой и пятая с шестой. Таким образом, остается всего три различных модуля упругости. Свободная энергия кристаллов кубической системы имеет вид [1])

$$F = \frac{1}{2}\lambda_{xxxx}(u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u_{zz}^2) + \lambda_{xxyy}(u_{xx}u_{yy} + u_{xx}u_{zz} + u_{yy}u_{zz}) + \\ + 2\lambda_{xyxy}(u_{xy}^2 + u_{xz}^2 + u_{yz}^2). \quad (10.10)$$

Выпишем еще раз число независимых параметров (модулей упругости или углов, определяющих ориентацию осей в кристалле) для классов различных систем:

триклинная	21
моноклинная	13
ромбическая	9
тетрагональная ($\boldsymbol{C}_4$, $\boldsymbol{S}_4$, $\boldsymbol{C}_{4h}$)	7
тетрагональная ($\boldsymbol{C}_{4v}$, $\boldsymbol{D}_{2d}$, $\boldsymbol{D}_4$, $\boldsymbol{D}_{4h}$)	6
ромбоэдрическая ($\boldsymbol{C}_3$, $\boldsymbol{S}_6$)	7
ромбоэдрическая ($\boldsymbol{C}_{3v}$, $\boldsymbol{D}_3$, $\boldsymbol{D}_{3d}$)	6
гексагональная	5
кубическая	3

Минимальное же число отличных от нуля модулей, которого можно добиться надлежащим выбором осей координат, одинаково для всех классов в каждой системе:

триклинная	18
моноклинная	12
ромбическая	9
тетрагональная	6
ромбоэдрическая	6
гексагональная	5
кубическая	3

[1]) В кубических классах $\boldsymbol{T}$ и $\boldsymbol{T}_d$ нет осей четвертого порядка. Тот же результат получается, однако, в этих случаях путем рассмотрения осей третьего порядка, повороты вокруг которых переводят друг в друга оси второго порядка — оси x, y, z.

Все сказанное относится, разумеется, к монокристаллам. Поликристаллические же тела с достаточно малыми размерами входящих в их состав кристаллитов можно рассматривать как изотропные тела (поскольку мы интересуемся деформациями в участках, больших по сравнению с размерами кристаллитов). Как и всякое изотропное тело, поликристалл характеризуется всего двумя модулями упругости. Можно было бы на первый взгляд подумать, что эти модули можно получить из модулей упругости отдельных кристаллитов посредством простого усреднения. В действительности, однако, это не так. Если рассматривать деформацию поликристалла как результат деформации входящих в него кристаллитов, то следовало бы в принципе решить уравнения равновесия для всех этих кристаллитов с учетом соответствующих граничных условий на поверхностях их раздела. Отсюда видно, что связь между упругими свойствами кристалла, рассматриваемого в целом, и свойствами составляющих его кристаллитов зависит от конкретной формы кристаллитов и от корреляции между их взаимными ориентациями. Поэтому не существует общей зависимости между модулями упругости поликристаллов и монокристалла (того же вещества).

Вычисление модулей изотропного поликристалла по монокристаллическим модулям может быть произведено со значительной точностью лишь в случае слабой анизотропии упругих свойств монокристалла [1]). В первом приближении модули упругости поликристалла можно положить равными просто «изотропной части» упругих модулей монокристалла. Тогда в следующем приближении появляются члены, квадратичные по малой «анизотропной части» этих модулей. Оказывается, что эти поправочные члены не зависят от формы кристаллитов и от корреляции их ориентаций и могут быть вычислены в общем виде [2]).

Наконец, остановимся на тепловом расширении кристаллов. В изотропных телах тепловое расширение происходит одинаково по всем направлениям, так что тензор деформации при свободном тепловом расширении имеет вид (см. § 6)

$$u_{ik} = \frac{1}{3}\alpha(T - T_0)\delta_{ik},$$

где α — коэффициент теплового расширения. В кристаллах же надо писать

$$u_{ik} = \frac{\alpha_{ik}}{3}(T - T_0), \tag{10.11}$$

где α_{ik} — некоторый тензор второго ранга, симметричный по ин-

---

[1]) Так, мерой анизотропии упругих свойств кубического кристалла является разность $\lambda_{xxxx} - \lambda_{xxyy} - 2\lambda_{xyxy}$; если она равна нулю, выражение (10.10) сводится к выражению упругой энергии изотропного тела (4.3).

[2]) См. *И.М. Лифшиц, Л.Н. Розенцвейг.* // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. С. 967.

дексам i, k. Выясним число различных независимых компонент этого тензора в кристаллах разных систем. Для этого проще всего воспользоваться известным из тензорной алгебры обстоятельством, что всякому симметричному тензору второго ранга можно привести в соответствие некоторый, как говорят, тензорный эллипсоид [1]). Из соображений симметрии непосредственно очевидно, что при триклинной, моноклинной и ромбической симметриях эллипсоид является, вообще говоря, трехосным (т. е. длины всех его осей различны). При тетрагональной же, ромбоэдрической и гексагональной симметриях эллипсоид должен являться эллипсоидом вращения (с осью соответственно вдоль осей симметрии C_4, C_3 или C_6). Наконец, кубическая симметрия приводит к вырождению эллипсоида в шар. Но трехосный эллипсоид определяется тремя независимыми величинами (длинами осей), эллипсоид вращения — двумя, а шар — всего одной (радиусом). Таким образом, число независимых компонент тензора α_{ik} в кристаллах различных систем есть:

триклинная, моноклинная, ромбическая	3
тетрагональная, ромбоэдрическая, гексагональная	2
кубическая	1

Кристаллы первых трех систем называются двухосными, а вторых трех — одноосными. Обратим внимание на то, что тепловое расширение кристаллов кубической системы определяется всего одной величиной, т. е. что они ведут себя в отношении своего теплового расширения как изотропные тела.

Задачи

1. Выразить упругую энергию гексагонального кристалла с помощью упругих модулей λ_{iklm} в координатах x, y, z (ось x — по оси шестого порядка).

Решение. При произвольном (не ортогональном) преобразовании координат надо различать контра- и ковариантные компоненты векторов и тензоров; первые преобразуются как сами координаты x^i (их принято обозначать с верхними индексами), а вторые — как операторы дифференцирования $\partial/\partial x^i$ (их обозначают с нижними индексами). Скаляр (10.1) надо записывать при этом как

$$F = \frac{1}{2}\lambda_{iklm}u^{ik}u^{lm}.$$

В выражениях (10.8), (10.9) компоненты u_{ik} преобразованы как контравариантные; поэтому для установления связи между компонентами λ_{iklm} в координатах ξ, η, z и x, y, z их надо рассматривать как ковариантные (в декартовых координатах те и другие компоненты, разумеется, совпадают). Для преобразования (10.7) имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta}\right).$$

[1]) Тензорный эллипсоид определяется уравнением $\alpha_{ik}x_ix_k = 1$.

Преобразуя компоненты λ_{iklm} как произведения этих операторов, найдем

$$\lambda_{xxxx} = \lambda_{yyyy} = 4\lambda_{\xi\eta\xi\eta} + 2\lambda_{\xi\xi\eta\eta}, \quad \lambda_{xyxy} = 2\lambda_{\xi\xi\eta\eta},$$

$$\lambda_{xxyy} = 4\lambda_{\xi\eta\xi\eta} - 2\lambda_{\xi\xi\eta\eta}, \quad \lambda_{xxzz} = \lambda_{yyzz} = 2\lambda_{\xi\eta zz},$$

$$\lambda_{xzxz} = \lambda_{yzyz} = 2\lambda_{\xi z\eta z}.$$

Свободная энергия (10.9), выраженная через эти модули, имеет вид

$$F = \frac{1}{2}\lambda_{xxxx}(u_{xx} + u_{yy})^2 + \frac{1}{2}\lambda_{zzzz}u_{zz}^2 + \lambda_{xxzz}(u_{xx} + u_{yy})u_{zz} + \\ + 2\lambda_{xzxz}(u_{xz}^2 + u_{yz}^2) + (\lambda_{xxxx} - \lambda_{xxyy})(u_{xy}^2 - u_{xx}u_{yy}).$$

2. Найти условия положительности упругой энергии кубического кристалла.

Решение. Первые два члена в (10.10) составляют квадратичную форму трех независимых переменных u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}. Условия положительности этой формы требуют положительности определителя ее коэффициентов, одного из его миноров и коэффициента λ_{xxxx}. Кроме того, должен быть положителен третий член в (10.10). Эти условия приводят к неравенствам

$$\lambda_1 > 0, \ \lambda_3 > 0, \ -\frac{\lambda_1}{2} < \lambda_2 < \lambda_1,$$

где обозначено $\lambda_1 = \lambda_{xxxx}$, $\lambda_2 = \lambda_{xxyy}$, $\lambda_3 = \lambda_{xyxy}$.

3. Определить зависимость модуля растяжения кубического кристалла от направления в нем.

Решение. Выбираем оси координат в направлениях ребер куба. Пусть ось вырезанного из кристалла стержня имеет направление единичного вектора $\mathbf{n}$. Тензор напряжений в растянутом стержне должен удовлетворять следующим условиям: должно быть $\sigma_{ik}n_k = pn_i$, где p — действующая на единицу площади оснований стержня растягивающая сила (условие на основаниях стержня); для направлений $\mathbf{t}$, перпендикулярных $\mathbf{n}$, должно быть $\sigma_{ik}t_k = 0$ (условие на боковых сторонах стержня). Такой тензор должен иметь вид $\sigma_{ik} = pn_in_k$. Вычислив компоненты σ_{ik} дифференцированием выражения (10.10) [1]) и сравнив их с выражениями $\sigma_{ik} = pn_in_k$, получим для компонент тензора деформации выражения

$$u_{xx} = p\frac{(\lambda_1 + 2\lambda_2)n_x^2 - \lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 + 2\lambda_2)}, \quad u_{xy} = p\frac{n_xn_y}{2\lambda_3}$$

и аналогичные для остальных компонент.

Относительное продольное удлинение стержня есть $u = \dfrac{dl' - dl}{dl}$, где dl' дается формулой (1.2) и $\dfrac{dx_i}{dl} = n_i$. Это дает для малых деформаций

---

[1]) Если вычислять σ_{ik} не непосредственно по формулам $\sigma_{ik} = \lambda_{iklm}u_{lm}$, а путем дифференцирования конкретного выражения F, то производные по u_{ik} с $i \neq k$ дают удвоенные значения σ_{ik}. Это связано с тем, что формула $\sigma_{ik} = \partial F/\partial u_{ik}$ имеет по существу смысл лишь как выражающая тот факт, что $dF = \sigma_{ik}\,du_{ik}$; но в сумму $\sigma_{ik}\,du_{ik}$ члены с дифференциалами du_{ik} каждой из компонент с $i \neq k$ симметричного тензора u_{ik} входят дважды.

$u = u_{ik} n_i n_k$. Модуль Юнга определяется как коэффициент пропорциональности в $p = Eu$, и для него находим

$$\frac{1}{E} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{(\lambda_1 + 2\lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)} + \left(\frac{1}{\lambda_3} - \frac{2}{\lambda_1 - \lambda_2}\right)(n_x^2 n_y^2 + n_x^2 n_z^2 + n_y^2 n_z^2).$$

Модуль имеет экстремальные значения в направлениях ребер (оси x, y, z) и пространственных диагоналей куба. В направлении вдоль ребер куба

$$E = (\lambda_1 + 2\lambda_2)\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

При этом поперечное сжатие стержня $u_{xx} = u_{yy} = -\sigma u_{zz} = -\sigma u$, где величина $\sigma = \lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2)$ играет роль коэффициента Пуассона. Согласно полученным в предыдущей задаче неравенствам: $-1 < \sigma < 1/2$.

ГЛАВА II

РАВНОВЕСИЕ СТЕРЖНЕЙ И ПЛАСТИНОК

§ 11. Энергия изогнутой пластинки

В этой главе мы будем заниматься изучением некоторых частных случаев равновесия деформируемых тел и начнем с рассмотрения деформаций тонких пластинок. Когда мы говорим, что пластинка является тонкой, то подразумевается, что ее толщина мала по сравнению с размерами в двух других направлениях. Сами деформации по-прежнему считаются малыми. В данном случае критерием малости деформации является малость смещений точек пластинки по сравнению с ее толщиной.

При применении к тонким пластинкам общие уравнения равновесия значительно упрощаются. Удобнее, однако, выводить эти упрощенные уравнения не непосредственно из общих уравнений, а вычислять заново свободную энергию изогнутой пластинки и затем проварьировать эту энергию.

При сгибании пластинки внутри нее в некоторых местах возникают растяжения, в других — сжатия. Именно, на выпуклой стороне пластинки происходит растяжение; по мере же углубления в толщу пластинки это растяжение постепенно уменьшается, достигая в конце концов нуля, вслед за чем в дальнейших слоях начинается постепенно увеличивающееся сжатие. Таким образом, внутри пластинки имеется *нейтральная поверхность*, на которой растяжение вообще отсутствует, а по двум сторонам ее деформация имеет противоположный знак. Очевидно, что эта поверхность расположена по середине толщины пластинки.

Выберем систему координат с началом в какой-нибудь точке нейтральной поверхности и осью z, направленной по нормали к ней. Плоскость xy совпадает с плоскостью недеформированной пластинки. Обозначим вертикальное смещение точек нейтральной поверхности, т. е. их z-координату, буквой ζ (рис. 2). Что касается компонент смещений этих точек в плоскости xy, то они являются, очевидно, величинами второго порядка малости по сравнению с ζ и потому могут быть положены равными нулю. Таким образом, вектор смещения точек нейтральной поверхности:

$$u_x^{(0)} = u_y^{(0)} = 0, \quad u_z^{(0)} = \zeta(x, y). \tag{11.1}$$

Для дальнейших вычислений необходимо сделать следующее замечание относительно напряжений, действующих в деформи-

рованной пластинке. Поскольку пластинка тонкая, то для того чтобы изогнуть ее требуется приложить к ее поверхности сравнительно небольшие силы. Эти силы во всяком случае будут значительно меньше, чем те внутренние напряжения, которые возникают внутри деформированной пластинки благодаря имеющим в ней место растяжениям и сжатиям. Поэтому в граничных условиях (2.9) можно пренебречь силами P_i, так что остается $\sigma_{ik}n_k = 0$. Поскольку пластинка слабо изогнута, то можно считать, что вектор нормали **n** направлен по оси z. Таким образом, на обеих поверхностях пластинки должно быть

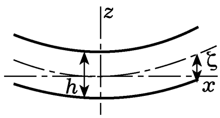


Рис. 2

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0.$$

Но поскольку толщина пластинки мала, то из равенства этих величин нулю на двух сторонах пластинки следует, что они малы и внутри нее. Таким образом, мы приходим к выводу, что во всей пластинке компоненты σ_{xz}, σ_{yz}, σ_{zz} малы по сравнению с остальными компонентами тензора напряжений. На этом основании мы можем положить их равными нулю и определить компоненты тензора деформации из этого условия.

Согласно общим формулам (5.13) имеем

$$\begin{gathered}\sigma_{zx} = \frac{E}{1+\sigma}u_{zx}, \quad \sigma_{zy} = \frac{E}{1+\sigma}u_{zy},\\ \sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}[(1-\sigma)u_{zz} + \sigma(u_{xx}+u_{yy})].\end{gathered} \tag{11.2}$$

Приравнивая эти выражения нулю, находим

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial y}, \quad u_{zz} = -\frac{\sigma}{1-\sigma}(u_{xx}+u_{yy}).$$

В первые два уравнения можно для u_z с достаточной точностью подставить $\zeta(x, y)$:

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{\partial \zeta}{\partial y},$$

откуда

$$u_x = -z\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad u_y = -z\frac{\partial \zeta}{\partial y}. \tag{11.3}$$

Постоянные интегрирования положены равными нулю так, чтобы при $z = 0$ имело место $u_x = u_y = 0$. Зная u_x и u_y, можно определить все компоненты тензора деформации:

$$\begin{gathered}u_{xx} = -z\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad u_{yy} = -z\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}, \quad u_{xy} = -z\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\,\partial y},\\ u_{xz} = u_{yz} = 0, \quad u_{zz} = z\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)\frac{\sigma}{1-\sigma}.\end{gathered} \tag{11.4}$$

Теперь уже можно вычислить, воспользовавшись общей формулой (5.10), свободную энергию F единицы объема пластинки. Простое вычисление приводит к выражению

$$F = z^2 \frac{E}{1+\sigma} \left\{ \frac{1}{2(1-\sigma)} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \, \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right] \right\}. \tag{11.5}$$

Полная свободная энергия пластинки получится отсюда интегрированием по всему ее объему. Интегрирование по z производится в пределах от $-h/2$ до $+h/2$, где h — толщина пластинки, а по x, y — по всей поверхности пластинки. В результате находим полную свободную энергию $F_{\text{пл}} = \int F \, dV$ деформированной пластинки в виде

$$F_{\text{пл}} = \frac{Eh^3}{24(1-\sigma^2)} \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 + \right.$$
$$\left. + 2(1-\sigma) \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \, \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right] \right\} dx \, dy \tag{11.6}$$

(для элемента поверхности можно ввиду малости деформации писать с достаточной точностью просто $dx \, dy$).

После того как получено выражение для свободной энергии, можно рассматривать пластинку как не обладающую толщиной, т. е. как геометрическую поверхность, поскольку нас интересует только форма, принимаемая ею под влиянием приложенных сил, а не распределение деформаций внутри самой пластинки. Величина ζ является тогда смещением точек пластинки, рассматриваемой как поверхность, при ее изгибании.

§ 12. Уравнение равновесия пластинки

Уравнение равновесия пластинки мы выведем из условия минимума ее свободной энергии. Для этого надо вычислить вариацию выражения (11.6).

Разобьем стоящий в (11.6) интеграл на сумму двух интегралов и будем варьировать каждый из них в отдельности. Первый интеграл можно написать в виде

$$\int (\Delta \zeta)^2 \, df,$$

где $df = dx \, dy$ — элемент поверхности, а $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ обозначает здесь (и везде в § 12–14) двумерный оператор Лапласа. Варьируя этот интеграл, имеем

$$\delta \frac{1}{2} \int (\Delta \zeta)^2 \, df = \int \Delta \zeta \Delta \delta \zeta \, df = \int \Delta \zeta \operatorname{div} \operatorname{grad} \delta \zeta \, df =$$
$$= \int \operatorname{div}(\Delta \zeta \nabla \delta \zeta) \, df - \int \nabla \delta \zeta \nabla \Delta \zeta \, df.$$

Все векторные операции производятся здесь, конечно, в двухмерной системе координат xy. Первый интеграл справа преобразуем в интеграл по замкнутому контуру, охватывающему пластинку [1]):

$$\int \operatorname{div}(\Delta\zeta\nabla\delta\zeta)\,df = \oint \Delta\zeta(\mathbf{n}\operatorname{grad}\delta\zeta)\,dl = \oint \Delta\zeta\frac{\partial\delta\zeta}{\partial n}\,dl,$$

где $\partial/\partial n$ означает дифференцирование по направлению внешней нормали к контуру.

Во втором интеграле применяем такое же преобразование и получаем

$$\int \nabla\delta\zeta\nabla\Delta\zeta\,df = \int \nabla(\delta\zeta\nabla\Delta\zeta)\,df - \int \delta\zeta\Delta^2\zeta\,df =$$
$$= \oint \delta\zeta(\mathbf{n}\nabla)\Delta\zeta\,dl - \int \delta\zeta\Delta^2\zeta\,df = \oint \delta\zeta\frac{\partial\Delta\zeta}{\partial n}\,dl - \int \delta\zeta\Delta^2\zeta\,df.$$

Подставляя полученные результаты, получаем

$$\delta\frac{1}{2}\int (\Delta\zeta)^2\,df = \int \delta\zeta\Delta^2\zeta\,df - \oint \delta\zeta\frac{\partial\Delta\zeta}{\partial n}\,dl + \oint \Delta\zeta\frac{\partial\delta\zeta}{\partial n}\,dl. \quad (12.1)$$

Преобразование вариации второго интеграла в (11.6) несколько более длинно. Это преобразование удобнее производить не в векторном виде, а в компонентах. Имеем

$$\delta\int\left\{\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right\}df =$$
$$= \int\left\{2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2\delta\zeta}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\delta\zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\delta\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right\}df.$$

Подынтегральное выражение здесь можно написать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\delta\zeta}{\partial y}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial\delta\zeta}{\partial x}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\delta\zeta}{\partial x}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial\delta\zeta}{\partial y}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right),$$

т. е. как двумерную дивергенцию некоторого вектора. Поэтому

[1]) Формула преобразования двумерных интегралов в точности аналогична трехмерной формуле. Роль элемента объема dV играет теперь элемент поверхности df (рассматриваемый как скаляр), а вместо элемента поверхности $d\mathbf{f}$ стоит элемент длины контура dl, умноженный на вектор $\mathbf{n}$ внешней нормали к контуру. Преобразование интеграла по df в интеграл по dl осуществляется заменой оператора $df\,\partial/\partial x_i$ на величину $n_i\,dl$. Так, если φ есть некоторый скаляр, то

$$\int \nabla\varphi\,df = \oint \varphi\mathbf{n}\,dl.$$

можно переписать вариацию в виде интеграла по контуру:

$$\delta\int\left\{\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right\}df=\oint dl\sin\theta\left\{\frac{\partial\delta\zeta}{\partial x}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial\delta\zeta}{\partial y}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right\}+$$
$$+\oint dl\cos\theta\left\{\frac{\partial\delta\zeta}{\partial y}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial\delta\zeta}{\partial x}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right\},\qquad(12.2)$$

где θ — угол между осью x и нормалью $\mathbf{n}$ к контуру (рис. 3).

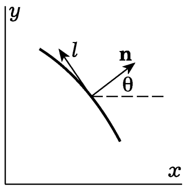


Рис. 3

Производные от $\delta\zeta$ по x и y выразим через производные по направлению нормали $\mathbf{n}$ к контуру и по направлению касательной $\mathbf{l}$ к нему согласно формулам

$$\frac{\partial}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial n}-\sin\theta\frac{\partial}{\partial l},\qquad\frac{\partial}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial}{\partial n}+\cos\theta\frac{\partial}{\partial l}.$$

Тогда интегралы в формуле (12.2) приобретают следующий вид:

$$\delta\int\{\ldots\}\,df=$$
$$=\oint dl\frac{\partial\delta\zeta}{\partial n}\left\{2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}-\sin^2\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}-\cos^2\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right\}+$$
$$+\oint dl\frac{\partial\delta\zeta}{\partial l}\left\{\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)+(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right\}.$$

Второй интеграл можно вычислить, взяв его по частям. Поскольку он берется по замкнутому контуру, то пределы интегрирования сливаются в одну точку, и потому мы получаем просто

$$-\oint dl\,\delta\zeta\frac{\partial}{\partial l}\left\{\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)+(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right\}.$$

Сводя все полученные выражения вместе и написав перед ними коэффициенты согласно формуле (11.6), получаем окончательно следующее выражение для вариации свободной энергии:

$$\delta F_{\text{пл}}=D\left\{\int\Delta^2\zeta\delta\zeta\,df-\oint\delta\zeta\,dl\left[\frac{\partial\Delta\zeta}{\partial n}+\right.\right.$$
$$\left.+(1-\sigma)\frac{\partial}{\partial l}\left(\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)+(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right)\right]+$$
$$+\oint\frac{\partial\delta\zeta}{\partial n}dl\left[\Delta\zeta+(1-\sigma)\left(2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}-\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-\sin^2\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}-\cos^2\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)\right]\right\},\qquad(12.3)$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}. \tag{12.4}$$

Для того чтобы получить отсюда уравнение равновесия пластинки, надо приравнять нулю сумму вариации δF и вариации δU потенциальной энергии пластинки, связанной с наличием действующих на нее внешних сил. Эта последняя вариация равна взятой с обратным знаком работе внешних сил при смещении пластинки. Пусть P есть действующая на пластинку внешняя сила, отнесенная к единице площади ее поверхности [1]) и направленная по нормали к ней. Тогда работа, произведенная силами при смещении точек пластинки на $\delta\zeta$, равна

$$\int P\,\delta\zeta\,df.$$

Таким образом, имеем в качестве условия минимальности полной свободной энергии пластинки уравнение

$$\delta F_{\text{пл}} - \int P\,\delta\zeta\,df = 0.$$

В левой части этого равенства стоят как интегралы по поверхности, так и интегралы по контуру. Поверхностный интеграл есть

$$\int \{D\,\Delta^2\zeta - P\}\,\delta\zeta\,df.$$

Вариация $\delta\zeta$ в нем произвольна. Поэтому интеграл равен нулю, если

$$D\,\Delta^2\zeta = P. \tag{12.5}$$

Это — уравнение равновесия пластинки, изгибаемой действующими на нее внешними силами. Коэффициент в этом уравнении называют *жесткостью* пластинки при изгибе или *цилиндрической жесткостью.*

Граничные условия для этого уравнения получаются из равенства нулю контурных интегралов в (12.3). При этом следует рассмотреть несколько различных частных случаев.

Предположим, что часть края пластинки свободна, т. е. на нее не действуют никакие внешние силы. Тогда вариации $\delta\zeta$ и $\delta\,(\partial\zeta/\partial n)$ на ней произвольны и должны быть равными нулю коэффициенты при этих вариациях в интегралах по контуру. Это

---

[1]) Сила P может являться здесь результатом действия объемных сил (например, силы тяжести) и равна тогда интегралу от последней по толщине пластинки.

приводит к уравнениям

$$-\frac{\partial\Delta\zeta}{\partial n}+(1-\sigma)\frac{\partial}{\partial l}\left\{\cos\theta\sin\theta\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)+\right.$$
$$\left.+(\sin^2\theta-\cos^2\theta)\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right\}=0, \quad (12.6)$$

$$\Delta\zeta+(1-\sigma)\left\{2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}-\sin^2\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}-\cos^2\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right\}=0. \quad (12.7)$$

Они должны выполняться на всей свободной границе пластинки.

Краевые условия (12.6), (12.7) весьма сложны. Значительно более просты случаи, когда края пластинки *заделаны* или *оперты*. Если края пластинки заделаны (рис. 4 *а*), то они не могут испытывать никакого вертикального смещения и, сверх того, не может измениться также и направление этих краев. Угол, на который поворачивается данный участок края пластинки относительно своего первоначального положения, равен (при малых смещениях ζ) производной $\partial\zeta/\partial n$. Таким образом, на заделанных краях пластинки вариации $\delta\zeta$ и $\delta\,(\partial\zeta/\partial n)$ равны нулю, так что контурные интегралы в (12.3) исчезают тождественно. Граничные условия имеют в этом случае простой вид:

$$\zeta=0, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial n}=0. \quad (12.8)$$

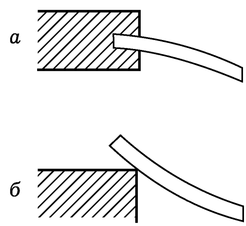


Рис. 4

Первое выражает собой тот факт, что края пластинки вообще не испытывают вертикального смещения при деформации, а второе — что направление края остается горизонтальным.

Легко определить силы реакции, действующие на пластинку со стороны опоры в точках закрепления. Эти силы равны и противоположны силам, действующим на опору со стороны пластинки. Как известно из механики, сила, действующая в некотором направлении, равна производной от энергии по координатам, взятой по этому направлению. В частности, сила, с которой пластинка действует на опору, определяется производной от энергии по смещению ζ края пластинки, взятой с обратным знаком, а обратная сила реакции — той же производной с положительным знаком. Но эта производная есть не что иное, как коэффициент при $\delta\zeta$ во втором интеграле в (12.3). Таким образом, сила реакции, отнесенная к единице длины контура, равна выражению, стоящему в левой части уравнения (12.6) (конечно, не равному теперь нулю), умноженному на D. Аналогично, момент сил реакции определяется выражением, стоящим в левой

части уравнения (12.7), умноженным на тот же коэффициент D. Это следует из известного из механики обстоятельства, что момент силы равен производной от энергии по углу поворота тела. Угол же поворота края пластинки равен производной $\partial\zeta/\partial n$, так что соответствующий момент сил определяется коэффициентом при $\delta\,(\partial\zeta/\partial n)$ в третьем интеграле в (12.3). При этом оба эти выражения (для силы и момента) ввиду условий (12.8) сильно упрощаются. Именно, поскольку ζ и $\partial\zeta/\partial n$ равны нулю вдоль всего контура края пластинки, то обращаются тождественно в нуль также и их производные всех порядков по направлению касательной $\mathbf{l}$. Учитывая это обстоятельство и переходя в (12.6) и (12.7) от производных по x и y к производным в направлениях $\mathbf{n}$ и $\mathbf{l}$, получим следующие простые выражения для силы F и момента M реакции опоры:

$$F = -D\left[\frac{\partial^3\zeta}{\partial n^3} + \frac{d\theta}{dl}\frac{\partial^2\zeta}{\partial n^2}\right], \tag{12.9}$$

$$M = D\frac{\partial^2\zeta}{\partial n^2}. \tag{12.10}$$

Другой важный случай — опертая пластинка (рис. 4 *б*), у которой края только опираются на неподвижную опору, но не закреплены в ней. В таком случае на контуре пластинки (т. е. на линии, по которой пластинка опирается на опору) вертикальное смещение по-прежнему отсутствует, но направление отнюдь не остается неизменным. Соответственно этому в (12.3) в интеграле по контуру

$$\delta\zeta = 0,$$

но

$$\frac{\partial\delta\zeta}{\partial n} \neq 0.$$

Поэтому из двух условий (12.6), (12.7) остается только второе. Выражение же, стоящее в левой части (12.6), определяет, как и в предыдущем случае, силу реакции, действующую в точках опоры пластинки (момент же этих сил равен теперь в равновесии нулю). Граничное условие (12.7) упрощается, если перейти к производным по направлениям $\mathbf{n}$ и $\mathbf{l}$, причем учесть, что в силу равенства $\zeta = 0$ на всем контуре обращаются в нуль также и производные $\partial\zeta/\partial l$ и $\partial^2\zeta/\partial l^2$. В результате получим граничные условия в виде

$$\zeta = 0, \qquad \frac{\partial^2\zeta}{\partial n^2} + \sigma\frac{d\theta}{dl}\frac{\partial\zeta}{\partial n} = 0. \tag{12.11}$$

Задачи

1. Определить деформацию круглой пластинки (радиуса R) с заделанными краями, расположенной горизонтально в поле тяжести.

Решение. Выбираем полярные координаты с началом в центре пластинки. Сила, действующая на единицу площади поверхности пластинки, равна $P = \rho h g$. Уравнение (12.5) приобретает вид

$$\Delta^2\zeta = 64\beta, \quad \beta = \frac{3\rho g(1-\sigma^2)}{16h^2E}$$

(положительные ζ соответствуют смещению по направлению действия силы тяжести). Поскольку ζ есть функция только от r, то для Δ в полярных координатах надо писать $\Delta = \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{d}{dr}\right)$. Общий интеграл этого уравнения есть

$$\zeta = \beta r^4 + ar^2 + b + cr^2\ln\frac{r}{R} + d\ln\frac{r}{R}.$$

В данном случае надо положить $d = 0$, так как $\ln\dfrac{r}{R}$ обращается при $r=0$ в бесконечность, а также $c = 0$, так как этот член приводит к особой точке у $\Delta\zeta$ при $r = 0$ (это соответствовало бы силе, приложенной к центру пластинки, — см. задачу 3). Постоянные a и b определяются из граничных условий $\zeta = 0$, $\dfrac{d\zeta}{dr} = 0$ при $r = R$. В результате находим

$$\zeta = \beta(R^2 - r^2)^2.$$

2. То же для пластинки с опертыми краями.

Решение. Граничные условия (12.11) в случае круглой пластинки приобретают вид

$$\zeta = 0, \quad \frac{d\zeta}{dr} + \frac{\sigma}{r}\frac{d\zeta}{dr} = 0.$$

Решение аналогично решению задачи 1 и приводит к результату

$$\zeta = \beta(R^2 - r^2)\left(\frac{5+\sigma}{1+\sigma}R^2 - r^2\right).$$

3. Определить деформацию круглой пластинки с заделанными краями, к центру которой приложена сила f.

Решение. Везде, кроме начала координат, имеет место уравнение

$$\Delta^2\zeta = 0.$$

Интегрируя, находим

$$\zeta = ar^2 + b + cr^2\ln\frac{r}{R}.$$

(член с $\ln r$ опять опускаем). Полная сила, действующая на пластинку, равна силе f, приложенной к ее центру; поэтому интеграл от $\Delta^2\zeta$ по поверхности пластинки должен быть равен

$$2\pi\int_0^R r\Delta^2\zeta\, dr = \frac{f}{D}.$$

Отсюда получается $c = f/(8\pi D)$. Постоянные a и b определяются из граничных условий, и в результате находим

$$\zeta = \frac{f}{8\pi D}\left[\frac{1}{2}(R^2 - r^2) - r^2 \ln\frac{R}{r}\right].$$

4. То же для пластинки с опертыми краями.

Решение.

$$\zeta = \frac{f}{16\pi D}\left[\frac{3+\sigma}{1+\sigma}(R^2 - r^2) - 2r^2 \ln\frac{R}{r}\right].$$

5. Определить деформацию круглой пластинки, подвешенной в своем центре и находящейся в поле тяжести.

Решение. Уравнение для ζ и его общее решение — такие же, как в задаче 1. Поскольку в центре смещение $\zeta = 0$, то $c = 0$. Постоянные a, b определяются из граничных условий (12.6) и (12.7), имеющих при круговой симметрии вид

$$\frac{d\Delta\zeta}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{d^2\zeta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\zeta}{dr}\right) = 0, \qquad \frac{d^2\zeta}{dr^2} + \frac{\sigma}{r}\frac{d\zeta}{dr} = 0.$$

В результате находим

$$\zeta = \beta r^2\left[r^2 + 8R^2 \ln\frac{R}{r} + 2R^2\frac{3+\sigma}{1+\sigma}\right].$$

6. От тела отрывается тонкий слой (толщиной h) приложенными к нему внешними силами, действующими против сил поверхностного натяжения на поверхности отрыва. При заданных внешних силах устанавливается равновесие с определенными величиной поверхности отрыва и формой отрываемой пластинки (рис. 5). Вывести формулу, связывающую величину поверхностного натяжения с формой отрываемой пластинки.

Решение. Отрываемый слой рассматриваем как пластинку, один из краев которой (линия отрыва) заделан. Изгибающий момент, действующий у этого края, определяется формулой (12.10); работа, производимая этим моментом при удлинении области отрыва на δx, равна

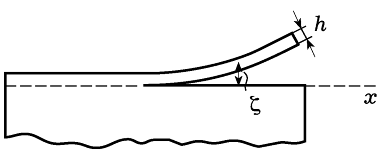


Рис. 5

$$M\frac{\partial\delta\zeta}{\partial x} = M\delta x\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} = D\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)^2\delta x \quad (1)$$

(работа же изгибающей силы F является малой величиной второго порядка). Условие равновесия состоит в равенстве этой работы изменению энергии системы. Последнее складывается из двух частей: изменения поверхностной энергии и изменения упругой энергии отрываемой пластинки за счет удлинения ее изогнутой части. Первая равна $2\alpha\delta x$, где α — коэффициент поверхностного натяжения, а множитель 2 учитывает возникновение при отрыве двух свободных поверхностей. Вторая же часть равна

$$\left[\frac{Eh^3}{24(1-\sigma^2)}\right]\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)^2\delta x$$

(энергия (11.6), приходящаяся на длину δx пластинки), т. е. составляет половину работы (1). Таким образом, получим

$$\alpha = \frac{D}{4}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)^2.$$

§ 13. Продольные деформации пластинок

Особым видом деформаций тонких пластинок являются продольные деформации, происходящие в самой плоскости пластинки и не сопровождающиеся ее изгибом. Выведем уравнения равновесия, описывающие такие деформации.

Если пластинка достаточно тонка, то деформацию можно считать однородной по ее толщине. Тензор деформации является при этом функцией только от x и y (плоскость xy выбрана в плоскости пластинки) и не зависит от z. Продольные деформации пластинки вызываются обычно либо силами, приложенными к ее краям, либо действующими в плоскости пластинки объемными силами. Граничные условия на обеих поверхностях пластинки гласят при этом: $\sigma_{ik}n_k = 0$, или, поскольку вектор нормали направлен по оси z: $\sigma_{iz} = 0$, т. е.

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0.$$

Следует, однако, заметить, что в излагаемой ниже приближенной теории эти условия остаются в силе и в том случае, когда растягивающие внешние силы приложены непосредственно к поверхностям пластинки, так как эти силы все равно будут малыми по сравнению с возникающими в пластинке продольными внутренними напряжениями (σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy}). Будучи равными нулю на границах, величины σ_{xz}, σ_{yz}, σ_{zz} будут малыми и на всем протяжении малой толщины пластинки, в силу чего мы можем приближенно считать их равными нулю во всем объеме пластинки.

Приравнивая нулю выражения (11.2), получим следующие соотношения:

$$u_{zz} = -\frac{\sigma}{1-\sigma}(u_{xx} + u_{yy}), \quad u_{xz} = u_{yz} = 0. \tag{13.1}$$

Подставив их в общие формулы (5.13), получаем отличные от нуля компоненты тензора напряжений в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\sigma^2}(u_{xx} + \sigma u_{yy}), \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\sigma^2}(u_{yy} + \sigma u_{xx}), \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{1+\sigma}u_{xy}. \end{aligned} \tag{13.2}$$

Следует обратить внимание на то, что путем формальной замены

$$E \to \frac{E}{1-\sigma^2}, \quad \sigma \to \frac{\sigma}{1-\sigma} \tag{13.3}$$

эти выражения переходят в формулы, определяющие связь между напряжениями σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{yy} и деформациями u_{xx}, u_{yy}, u_{zz} при плоской деформации (формулы (5.13) с $u_{zz} = 0$).

После того как мы таким образом исключили вовсе смещение u_z, мы можем рассматривать пластинку просто как некоторую двумерную среду (*упругая плоскость*), не обладающую толщиной, и говорить о векторе деформации $\mathbf{u}$ как о двумерном векторе с двумя компонентами u_x и u_y. Если P_x, P_y — компоненты внешней объемной силы, отнесенной к единице площади пластинки, то общие уравнения равновесия гласят:

$$h\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}\right) + P_x = 0, \quad h\left(\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}\right) + P_y = 0.$$

Подставляя сюда выражения (13.2), получаем уравнения равновесия в виде

$$Eh\left[\frac{1}{1-\sigma^2}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1+\sigma)}\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{1}{2(1-\sigma)}\frac{\partial^2 u_y}{\partial x\,\partial y}\right] + P_x = 0,$$

$$Eh\left[\frac{1}{1-\sigma^2}\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{1}{2(1+\sigma)}\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1-\sigma)}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\,\partial y}\right] + P_y = 0. \quad (13.4)$$

Эти уравнения могут быть написаны в двумерном векторном виде

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} - \frac{1-\sigma}{2}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u} = -\mathbf{P}\frac{1-\sigma^2}{Eh}, \quad (13.5)$$

где все векторные операции понимаются как двумерные.

В частности, в отсутствие объемных сил уравнение равновесия гласит:

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} - \frac{1-\sigma}{2}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u} = 0. \quad (13.6)$$

Оно отличается лишь значением коэффициента (в соответствии с (13.3)) от уравнения равновесия для плоской деформации неограниченного вдоль оси z тела (§ 7)[1]. Так же как и для плоской деформации, можно ввести здесь *функцию напряжения*, определенную соотношениями

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x\,\partial y}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \quad (13.7)$$

автоматически удовлетворяющими уравнениям равновесия, написанным в виде

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0.$$

---

[1]) Однородную вдоль оси z деформацию, при которой во всем теле $\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = \sigma_{zz} = 0$, иногда называют *плоским напряженным состоянием* в отличие от плоской деформации, при которой во всем теле $u_{zx} = u_{zy} = u_{zz} = 0$.

Функция напряжений по-прежнему удовлетворяет бигармоническому уравнению, так как для $\Delta\chi$ имеем соотношение

$$\Delta\chi = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\sigma}(u_{xx} + u_{yy}) = \frac{E}{1-\sigma}\operatorname{div}\mathbf{u},$$

отличающееся лишь множителем от того, что мы имели для плоской деформации.

Отметим здесь следующее обстоятельство: распределение напряжений в пластинке, деформируемой приложенными к ее краям заданными силами, не зависит от упругих постоянных вещества пластинки. Действительно, эти постоянные не входят ни в бигармоническое уравнение, которому удовлетворяет функция напряжений, ни в формулы (13.7), определяющие компоненты σ_{ik} по этой функции (а потому и в граничные условия на краях пластинки).

Задачи

1. Определить деформацию плоского диска, равномерно вращающегося вокруг оси, проходящей через его центр и перпендикулярной к его плоскости.

Решение. Искомое решение отличается лишь значениями постоянных коэффициентов от полученного в задаче 5 § 7 решения для плоской деформации вращающегося цилиндра. Радиальное смещение $u_r = u(r)$ дается формулой

$$u = \frac{\rho\Omega^2(1-\sigma^2)}{8E}\, r\left(\frac{3+\sigma}{1+\sigma}R^2 - r^2\right).$$

Это — выражение, переходящее при замене (13.3) в формулу, полученную в задаче 5 § 7.

2. Определить деформацию полубесконечной пластинки (с прямолинейным краем) под влиянием сосредоточенной силы, приложенной к точке края пластинки и действующей в ее плоскости.

Решение. Вводим полярные координаты с углом φ, отсчитываемым от направления действия приложенной силы; он пробегает значения от $-(\pi/2+\alpha)$ до $\pi/2-\alpha$, где α — угол между направлением силы и нормалью к краю пластинки (рис. 6). Во всех точках свободной границы, за исключением точки приложения внешней силы (начало координат), должны выполняться условия $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{r\varphi} = 0$. Воспользовавшись выражениями для $\sigma_{\varphi\varphi}$ и $\sigma_{r\varphi}$, полученными в задаче 11 § 7, найдем, что для этого функция напряжений должна удовлетворять условиям

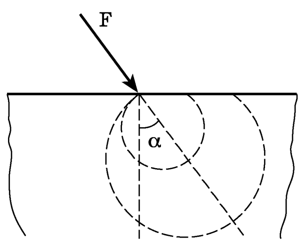


Рис. 6

$$\frac{\partial\chi}{\partial r} = \text{const}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial\varphi} = \text{const} \quad \text{при} \quad \varphi = \mp\frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Оба эти условия выполняются, если $\chi = rf(\varphi)$. При такой подстановке бигармоническое уравнение

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]^2\chi = 0$$

дает для $f(\varphi)$ решения вида $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\varphi\sin\varphi$, $\varphi\cos\varphi$. Из них первые два фиктивны, так как приводят к тождественно равным нулю напряжениям. Решение, дающее правильное значение приложенной в начале координат силы:

$$\chi = -\frac{F}{\pi}r\varphi\sin\varphi, \quad \sigma_{rr} = -\frac{2F}{\pi}\frac{\cos\varphi}{r}, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi\varphi} = 0 \tag{1}$$

(F — значение силы, отнесенное к единице толщины пластинки). Действительно, проецируя силы внутренних напряжений на направления, параллельное и перпендикулярное к силе $\mathbf{F}$, и интегрируя по малой полуокружности с центром в начале координат (радиус которой можно представить себе стремящимся затем к нулю), получим

$$\int \sigma_{rr}\cos\varphi r\,d\varphi = -F, \qquad \int \sigma_{rr}\sin\varphi r\,d\varphi = 0,$$

т. е. как раз те значения, которые компенсируются приложенной в начале координат внешней силой.

Формулы (1) определяют искомое распределение напряжений. Оно оказывается чисто радиальным: на всякую площадку, перпендикулярную к радиусу, действует только радиальная сжимающая сила. Линиями равных напряжений являются окружности $r = d\cos\varphi$, проходящие через начало координат и имеющие центры на прямой, вдоль которой действует сила $\mathbf{F}$ (рис. 6).

Компоненты тензора деформации

$$u_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{E}, \quad u_{\varphi\varphi} = -\frac{\sigma}{E}\sigma_{rr}, \quad u_{r\varphi} = 0.$$

Отсюда интегрированием (с помощью выражений (1.8) для компонент u_{ik} в полярных координатах) можно найти вектор смещения:

$$u_r = -\frac{2F}{\pi E}\cos\varphi\ln\frac{r}{a} - \frac{(1-\sigma)F}{\pi E}\varphi\sin\varphi,$$

$$u_\varphi = \frac{2\sigma F}{\pi E}\sin\varphi + \frac{2F}{\pi E}\ln\frac{r}{a}\sin\varphi + \frac{(1-\sigma)F}{\pi E}(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi).$$

Постоянные интегрирования выбраны здесь таким образом, чтобы исключить перемещение (перенос или поворот) пластинки как целого; именно, предполагается несмещенной некоторая условно выбранная точка, находящаяся на расстоянии a от начала координат на линии действия силы.

С помощью полученного решения можно построить решение для произвольного распределения сил, действующих на край пластинки (ср. § 8). Само по себе оно, разумеется, неприменимо в непосредственной окрестности начала координат.

3. Определить деформацию бесконечной клиновидной пластинки (с углом 2α при вершине) под влиянием силы, приложенной к ее вершине.

Р е ш е н и е. Распределение напряжений определяется формулами, отличающимися от полученных в предыдущей задаче лишь нормировкой. Если сила действует вдоль средней линии клина (сила F_1 на рис. 7), то имеем

$$\sigma_{rr} = -\frac{F_1\cos\varphi}{r(\alpha + (1/2)\sin 2\alpha)}, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi\varphi} = 0.$$

Если же сила действует в перпендикулярном направлении (F_2 на рис. 7), то

$$\sigma_{rr} = -\frac{F_2\cos\varphi}{r(\alpha - (1/2)\sin 2\alpha)}.$$

В каждом из этих двух случаев угол φ отсчитывается от соответствующего направления действия силы.

4. Определить деформацию круглого диска (радиуса R), сжатого двумя равными и противоположными силами Fh, приложенными к двум концам диаметра (рис. 8).

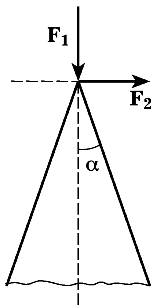


Рис. 7

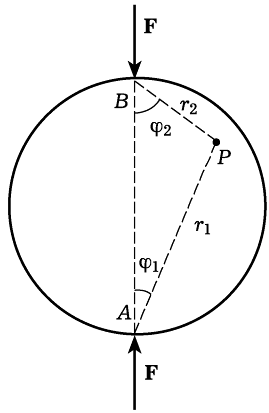


Рис. 8

Решение. Решение задачи получается путем наложения трех распределений внутренних напряжений. Два распределения:

$$\sigma^{(1)}_{r_1r_1} = -\frac{2F}{\pi}\frac{\cos\varphi_1}{r_1}, \quad \sigma^{(1)}_{r_1\varphi_1} = \sigma^{(1)}_{\varphi_1\varphi_1} = 0,$$

$$\sigma^{(2)}_{r_2r_2} = -\frac{2F}{\pi}\frac{\cos\varphi_2}{r_2}, \quad \sigma^{(2)}_{r_2\varphi_2} = \sigma^{(2)}_{\varphi_2\varphi_2} = 0,$$

где r_1, φ_1 и r_2, φ_2 — полярные координаты произвольной точки P с началами соответственно в точках A и B (это есть напряжения, которые возникли бы от нормальной силы F, приложенной к точке на границе полуплоскости, см. задачу 2). Третье распределение

$$\sigma^{(3)}_{ik} = \frac{F}{\pi R}\delta_{ik}$$

представляет собой равномерное растяжение определенной интенсивности. Действительно, если точка P лежит на окружности края диска, то для нее $r_1 = 2R\cos\varphi_1$, $r_2 = 2R\cos\varphi_2$, так что

$$\sigma^{(1)}_{r_1r_1} = \sigma^{(2)}_{r_2r_2} = -\frac{F}{\pi R}.$$

Поскольку направления $\mathbf{r_1}$ и $\mathbf{r_2}$ в этой точке взаимно перпендикулярны, то мы видим, что первые две системы напряжений приводят на краю диска к равномерному сжатию; эти силы как раз компенсируются равномерным растяжением третьей системы, так что край диска оказывается, как и следовало, свободным от напряжений.

5. Определить распределение напряжений в неограниченной пластинке с круглым отверстием (радиуса R), подвергаемой равномерному растяжению.

Решение. Равномерному растяжению сплошной пластинки соответствуют напряжения $\sigma^{(0)}_{xx} = T$, $\sigma^{(0)}_{yy} = \sigma^{(0)}_{xy} = 0$, где T — растягивающая сила.

Им отвечает функция напряжений

$$\chi^{(0)} = \frac{T}{2}y^2 = \frac{T}{2}r^2\sin^2\varphi = \frac{1}{4}Tr^2(1-\cos 2\varphi).$$

При наличии круглого отверстия (с центром в начале полярных координат r, φ) ищем функцию напряжений в виде

$$\chi = \chi^{(0)} + \chi^{(1)}, \quad \chi^{(1)} = f(r) + F(r)\cos 2\varphi.$$

Не зависящий от φ интеграл бигармонического уравнения имеет вид

$$f(r) = ar^2\ln r + br^2 + c\ln r,$$

а в интеграле, пропорциональном $\cos 2\varphi$:

$$F(r) = dr^2 + er^4 + \frac{g}{r^2}.$$

Входящие сюда постоянные определяются условиями $\sigma_{ik}^{(1)} = 0$ при $r = \infty$ и $\sigma_{rr} = \sigma_{r\varphi} = 0$ при $r = R$. В результате получим

$$\chi^{(1)} = \frac{TR^2}{2}\left[-\ln r + \left(1 - \frac{R^2}{2r^2}\right)\cos 2\varphi\right],$$

и распределение напряжений определяется так:

$$\sigma_{rr} = \frac{T}{2}\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\left[1 + \left(1 - \frac{3R^2}{r^2}\right)\cos 2\varphi\right],$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{T}{2}\left[1 + \frac{R^2}{r^2} - \left(1 + \frac{3R^4}{r^4}\right)\cos 2\varphi\right],$$

$$\sigma_{r\varphi} = -\frac{T}{2}\left[1 + \frac{2R^2}{r^2} - \frac{3R^4}{r^4}\right]\sin 2\varphi.$$

В частности, на границе отверстия $\sigma_{\varphi\varphi} = T(1-2\cos 2\varphi)$, а при $\varphi = \pm\pi/2$ $\sigma_{\varphi\varphi} = 3T$, т. е. в три раза превосходит напряжения на бесконечности (ср. задачу 12 § 7).

§ 14. Сильный изгиб пластинок

Изложенная в § 11—13 теория изгиба тонких пластинок применима лишь к достаточно слабым изгибам. Забегая вперед, укажем уже здесь, что условием применимости этой теории является малость прогиба ζ по сравнению с толщиной h пластинки. Теперь мы перейдем к выводу уравнений равновесия сильно изогнутой пластинки. Прогиб ζ при этом уже не предполагается малым по сравнению с h. Подчеркиваем, однако, что самая деформация по-прежнему должна быть мала в том смысле, что тензор деформации должен быть мал. Практически это обычно означает требование $\zeta \ll l$, т. е. прогиб должен быть мал по сравнению с размерами l пластинки.

Изгиб пластинки сопровождается, вообще говоря, ее общим растяжением [1]). В случае слабого изгиба этим растяжением можно пренебречь. При сильном же изгибе этого уже отнюдь нельзя сделать; в сильно изогнутой пластинке не существует поэтому никакой «нейтральной поверхности». Наличие растяжения, сопровождающего изгиб, является специфической особенностью пластинок, отличающей их от тонких стержней, которые могут быть подвергнуты сильному изгибу, не испытывая при этом общего растяжения. Это свойство пластинок является чисто геометрическим. Пусть, например, плоская круглая пластинка изгибается в поверхность шарового сегмента. Если произвести изгиб так, чтобы длина окружности осталась неизменной, то должен растянуться ее диаметр. Если же диаметр пластинки не растягивается, то должна сжаться ее окружность.

Вычисленная в § 11 энергия (11.6), которую можно назвать энергией чистого изгиба, представляет собой лишь ту часть полной энергии, которая обусловлена неравномерностью растяжения и сжатия вдоль толщины пластинки при отсутствии какого-либо полного ее растяжения. Наряду с этой энергией в полную энергию входит еще часть, обусловленная как раз наличием этого общего растяжения; ее можно назвать энергией растяжения.

Деформации чистого изгиба и чистого растяжения были рассмотрены соответственно в § 11, 12 и 13. Поэтому теперь мы можем непосредственно воспользоваться полученными там результатами. При этом отпадает необходимость в рассмотрении структуры пластинки по ее толщине, и мы можем сразу рассматривать пластинку как двумерную поверхность, не обладающую толщиной.

Предварительно выведем выражение для тензора деформации, определяющего растяжение пластинки (рассматриваемой как поверхность), подвергнутой одновременному изгибу и растяжению в своей плоскости. Пусть $\mathbf{u}$ есть двумерный вектор смещения (с компонентами u_x, u_y) при чистом растяжении; ζ по-прежнему обозначает поперечное смещение при изгибе. Тогда элемент длины $dl^2 = dx^2 + dy^2$ недеформированной пластинки перейдет после деформации в элемент dl', квадрат которого равен

$$dl'^2 = (dx + du_x)^2 + (dy + du_y)^2 + d\zeta^2.$$

Написав здесь $du_x = \dfrac{\partial u_x}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u_x}{\partial y}dy$ и аналогично для du_y и $d\zeta$, получим с точностью до членов более высокого порядка

$$dl'^2 = dl^2 + 2u_{\alpha\beta}dx_\alpha dx_\beta,$$

[1]) Исключением является, например, изгиб плоской пластинки в цилиндрическую поверхность.

где двумерный тензор деформации определяется как

$$u_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial \zeta}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \zeta}{\partial x_\beta}. \tag{14.1}$$

(В этом и следующем параграфах мы будем обозначать греческими буквами индексы, пробегающие всего два значения x и y; по дважды повторяющимся индексам, как всегда, подразумевается суммирование.) Члены, квадратичные по производным от u_α, здесь опущены; с производными от ζ то же самое сделать, разумеется, нельзя, поскольку членов первого порядка по ним вообще не имеется.

Тензор напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$, связанный с растяжением пластинки, определяется формулами (13.2), в которые вместо $u_{\alpha\beta}$ надо подставить полный тензор деформации, определяемый согласно формуле (14.1). Энергия чистого изгиба определяется формулой (11.6), которую мы напишем условно в виде

$$\int \Psi_1(\zeta)\,dx\,dy,$$

где $\Psi_1(\zeta)$ обозначает все выражение, стоящее под интегралом (11.6). Энергия же растяжения, отнесенная к единице объема пластинки, есть, согласно общим формулам, $u_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}/2$. Энергия, приходящаяся на единицу поверхности, получается отсюда умножением на h, так что полная энергия растяжения может быть написана в виде

$$\int \Psi_2(u_{\alpha\beta})\,df,$$

где

$$\Psi_2 = h\frac{u_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}}{2}. \tag{14.2}$$

Таким образом, полная свободная энергия сильно изогнутой пластинки есть

$$F_{\text{пл}} = \int [\Psi_1(\zeta) + \Psi_2(u_{\alpha\beta})]\,df. \tag{14.3}$$

Раньше чем перейти к выводу уравнений равновесия, оценим обе части энергии. Первые производные от ζ — порядка ζ/l, где l — размеры пластинки, а вторые — порядка ζ/l^2. Поэтому из (11.6) видно, что $\Psi_1 \sim Eh^3\zeta^2/l^4$. Порядок же величины тензора $u_{\alpha\beta}$ есть ζ^2/l^2, и потому $\Psi_2 \sim Eh\zeta^4/l^4$. Сравнение обоих этих выражений показывает, что пренебрежение Ψ_2, делаемое в приближенной теории изгиба пластинок, законно только при условии $\zeta^2 \ll h^2$.

Условие минимальности энергии гласит: $\delta F + \delta U = 0$, где U — потенциальная энергия в поле внешних сил. Мы будем считать, что действием внешних растягивающих сил, если таковые имеются, можно пренебречь по сравнению с силами изгибающими.

(Это можно всегда сделать, если только растягивающие силы не слишком велики, поскольку тонкая пластинка гораздо легче подвергается изгибу, чем растяжению.) Тогда для δU имеем то же выражение, что и в § 12:

$$\delta U = -\int P\,\delta\zeta\,df,$$

где P — внешняя сила, отнесенная к единице поверхности пластинки. Вариация интеграла $\int \Psi_1 df$ была уже вычислена в § 12 и равна

$$\delta\int\Psi_1\,df = D\int\Delta^2\zeta\,\delta\zeta\,df.$$

Интегралы по контуру, стоящие в формуле (12.3), мы не пишем, поскольку они определяют не само уравнение равновесия, а только граничные условия к нему, которыми мы не станем здесь интересоваться.

Наконец, вычислим вариацию интеграла $\int\Psi_2\,df$. Варьирование в нем должно производиться как по компонентам вектора $\mathbf{u}$, так и по ζ. Имеем

$$\delta\int\Psi_2\,df = \int\frac{\partial\Psi_2}{\partial u_{\alpha\beta}}\,\delta u_{\alpha\beta}\,df.$$

Производные от свободной энергии единицы объема по $u_{\alpha\beta}$ равны $\sigma_{\alpha\beta}$; поэтому $\partial\Psi_2/\partial u_{\alpha\beta} = h\sigma_{\alpha\beta}$. Подставляя также для $u_{\alpha\beta}$ выражение (14.1), получаем

$$\delta\int\Psi_2\,df = h\int\sigma_{\alpha\beta}\,\delta u_{\alpha\beta}\,df =$$
$$= \frac{h}{2}\int\sigma_{\alpha\beta}\left\{\frac{\partial\delta u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial\delta u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial\zeta}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\delta\zeta}{\partial x_\beta} + \frac{\partial\delta\zeta}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\zeta}{\partial x_\beta}\right\}df,$$

или ввиду симметричности $\sigma_{\alpha\beta}$

$$\delta\int\Psi_2\,df = h\int\sigma_{\alpha\beta}\left\{\frac{\partial\delta u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial\delta\zeta}{\partial x_\beta}\frac{\partial\zeta}{\partial x_\alpha}\right\}df.$$

Интегрируя теперь по частям, получаем

$$\delta\int\Psi_2\,df = -h\int\left[\frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}\delta u_\alpha + \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial\zeta}{\partial x_\alpha}\right)\delta\zeta\right]df.$$

Интегралы по контуру, огибающему поверхность пластинки, мы опять не пишем.

Сводя вместе все полученные выражения, имеем

$$\delta F_{\text{пл}} + \delta U =$$
$$= \int\left\{\left[D\Delta^2\zeta - h\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial\zeta}{\partial x_\alpha}\right) - P\right]\delta\zeta - h\frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}\delta u_\alpha\right\}df = 0.$$

Для того чтобы это соотношение имело место тождественно, должны обращаться в нуль отдельно коэффициенты при $\delta\zeta$ и при δu_α. Таким образом, получаем систему уравнений

$$D\Delta^2\zeta - h\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial\zeta}{\partial x_\alpha}\right) = P, \tag{14.4}$$

$$\frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0. \tag{14.5}$$

В эту систему входят в качестве неизвестных функций три величины: две компоненты u_x, u_y вектора $\mathbf{u}$ и поперечное смещение ζ. Ее решение определяет одновременно форму изогнутой пластинки (т. е. функцию $\zeta(x, y)$) и возникающее в результате изгиба растяжение. Уравнения (14.4) и (14.5) могут быть несколько упрощены посредством введения в них функции χ, связанной с $\sigma_{\alpha\beta}$ соотношениями (13.7). После подстановки (13.7) в уравнение (14.4) оно приводится к виду

$$D\Delta^2\zeta - h\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2\chi}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right) = P. \tag{14.6}$$

Что касается уравнений (14.5), то выражениями (13.7) они удовлетворяются автоматически. Поэтому необходимо вывести еще одно уравнение, которое может быть получено исключением u_α из соотношений (13.7) и (13.2).

Для этого поступаем следующим образом. Выражаем $u_{\alpha\beta}$ через $\sigma_{\alpha\beta}$. Из (13.2) получаем

$$u_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \sigma\sigma_{yy}), \quad u_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \sigma\sigma_{xx}), \quad u_{xy} = \frac{1+\sigma}{E}\sigma_{xy}.$$

Подставляя сюда для $u_{\alpha\beta}$ выражение (14.1), а для $\sigma_{\alpha\beta}$ — выражения (13.7), находим равенства

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2} - \sigma\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}\right),$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} - \sigma\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}\right),$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y} = -\frac{2(1+\sigma)}{E}\frac{\partial^2\chi}{\partial x\,\partial y}.$$

Применим к первому равенству операцию $\partial^2/\partial y^2$, ко второму $\partial^2/\partial x^2$, к третьему $\partial^2/\partial x\,\partial y$, после чего сложим первое равенство со вторым и вычтем третье. Тогда члены, содержащие u_x и u_y, взаимно сокращаются, и мы получаем уравнение

$$\Delta^2\chi + E\left\{\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right\} = 0. \tag{14.7}$$

Уравнения (14.6) и (14.7) представляют собой полную систему уравнений сильного изгиба тонких пластинок (*A. Föppl*, 1907). Эти уравнения весьма сложны и не могут быть решены точно даже в простейших случаях. Обращаем внимание на то, что они нелинейны.

Упомянем коротко об особом случае деформаций тонких пластинок — о так называемых мембранах. *Мембраной* называют тонкую пластинку, подвергнутую сильному растяжению приложенными к ее краям внешними растягивающими силами. В таком случае можно пренебречь дополнительными продольными натяжениями, возникающими при изгибе пластинки, и соответственно этому можно считать, что компоненты тензора $\sigma_{\alpha\beta}$ равны просто постоянным внешним растягивающим напряжениям. В уравнении (14.4) можно теперь пренебречь первым членом по сравнению со вторым, и мы получаем уравнение равновесия

$$h\sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}+P=0 \tag{14.8}$$

с граничным условием $\zeta=0$ на контуре края мембраны. Это уравнение линейно. В особенности прост случай изотропного растяжения, когда натяжение мембраны одинаково по всем направлениям. Пусть T есть абсолютная величина приложенной к краю пластинки растягивающей силы, отнесенной к единице длины этого края. Тогда $h\sigma_{\alpha\beta}=T\delta_{\alpha\beta}$, и мы получаем уравнение равновесия в виде

$$T\Delta\zeta+P=0. \tag{14.9}$$

Задачи

1. Определить зависимость величины прогиба пластинки от действующей на нее силы при изгибе настолько сильном, что $\zeta\gg h$.

Решение. Оценка членов уравнения (14.7) показывает, что $\chi\sim E\zeta^2$. При $\zeta\gg h$ первый член в (14.6) мал по сравнению со вторым, который имеет порядок величины $h\zeta\chi/l^4\sim Eh\zeta^3/l^4$ (l — размеры пластинки). Сравнивая с внешней силой P, получаем

$$\zeta\sim\left(\frac{l^4P}{Eh}\right)^{1/3}.$$

Отсюда, в частности, видно, что ζ пропорционально кубическому корню из силы.

2. Определить деформацию круглой мембраны (радиуса R), расположенной горизонтально в поле тяжести.

Решение. Имеем $P=\rho gh$; в полярных координатах (14.9) принимает вид

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{\partial\zeta}{\partial r}\right)=-\frac{\rho gh}{T}.$$

Решение, конечное при $r=0$ и удовлетворяющее условию $\zeta=0$ при $r=R$, есть

$$\zeta=\frac{\rho gh}{4T}(R^2-r^2).$$

§ 15. Деформации оболочек

Говоря до сих пор о деформациях тонких пластинок, мы всегда подразумевали, что в недеформированном состоянии пластинка является плоской. Между тем деформации пластинок, обладающих в своем естественном состоянии искривленной формой (такие пластинки называют *оболочками*), обнаруживают особенности, принципиально отличающие их от деформаций плоских пластинок.

Растяжение, сопровождающее изгиб плоской пластинки, является эффектом второго порядка малости по сравнению с величиной самого прогиба. Это проявляется, например, в том, что тензор деформации (14.1), определяющий такое растяжение, квадратичен по ζ. Совершенно иное положение имеет место при деформациях оболочек: здесь растяжение есть эффект первого порядка и потому играет существенную роль даже при слабом изгибе. Проще всего это свойство видно уже из самого простого примера равномерного растяжения сферической оболочки. Если все ее точки подвергаются одинаковому радиальному смещению ζ, то увеличение длины экватора равно $2\pi\zeta$. Относительное растяжение $2\pi\zeta/(2\pi R) = \zeta/R$, а потому и тензор деформации пропорционален первой степени ζ. Этот эффект стремится к нулю при $R \to \infty$, т. е. при стремлении кривизны к нулю, и является, таким образом, специфическим свойством, связанным с кривизной оболочки.

Пусть R есть порядок величины радиуса кривизны оболочки, совпадающей обычно с порядком величины ее размеров. Тогда тензор деформации растяжения, сопровождающего изгиб, — порядка ζ/R, соответствующий тензор напряжений $\sim E\zeta/R$, а энергия деформации (отнесенная к единице площади), согласно (14.2), $\sim Eh(\zeta/R)^2$. Энергия же чистого изгиба по-прежнему $\sim Eh^3\zeta^2/R^4$. Мы видим, что отношение первой ко второй $\sim (R/h)^2$, т. е. очень велико. Подчеркнем, что это имеет место независимо от соотношения между величиной ζ изгиба и толщиной h, в то время как при изгибе плоских пластинок растяжение начинало играть роль только при $\zeta \sim h$.

В некоторых случаях может существовать особый тип изгиба оболочек, при котором никакого растяжения не происходит вовсе. Так, например, цилиндрическая оболочка (с открытыми обоими концами цилиндра) может быть деформирована без растяжения, если все образующие цилиндра остаются при изгибе параллельными друг другу (т. е. оболочка как бы вдавливается по какой-нибудь из образующих). Такие деформации без растяжения геометрически возможны, если оболочка имеет свободные края (т. е. не замкнута) или же если оболочка замкнута, но ее кривизна в разных местах имеет разный знак. Например, за-

мкнутая сферическая оболочка не может быть изогнута без растяжения, если же в ней прорезано отверстие (причем его края не закреплены), то такие деформации становятся возможными. Поскольку энергия чистого изгиба мала по сравнению с энергией растяжения, то ясно, что если данная оболочка допускает деформации без растяжения, то именно такие деформации и будут, вообще говоря, реально осуществляться при воздействии на нее произвольных внешних сил. Требование отсутствия растяжения при изгибе накладывает существенные ограничения на возможные смещения u_α. Эти условия являются чисто геометрическими и могут быть выражены в виде дифференциальных уравнений, которые должны содержаться в полной системе уравнений равновесия для таких деформаций. Мы не будем здесь останавливаться на этом вопросе.

Если же деформация оболочки сопровождается растяжением, то напряжения растяжения, вообще говоря, велики по сравнению с напряжениями изгиба и последними можно пренебречь (основанную на таком пренебрежении теорию оболочек называют *мембранной*).

Энергия растяжения оболочки может быть вычислена как интеграл

$$F_{\text{пл}} = \frac{h}{2}\int u_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}\,df, \tag{15.1}$$

взятый по ее поверхности. Здесь $u_{\alpha\beta}$ есть двумерный ($\alpha,\ \beta = 1,\ 2$) тензор деформации в соответствующих криволинейных координатах, а тензор напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$ связан с $u_{\alpha\beta}$ формулами (13.2), которые могут быть написаны в двумерных тензорных обозначениях как

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{1-\sigma^2}[(1-\sigma)u_{\alpha\beta} + \sigma\delta_{\alpha\beta}u_{\gamma\gamma}]. \tag{15.2}$$

Особого рассмотрения требует случай, когда оболочка подвержена воздействию сосредоточенных сил в поперечном к оболочке направлении. Такими силами могут являться, в частности, силы реакции, действующие на оболочку со стороны опор в точках (или линиях) закрепления. Сосредоточенные силы производят изгиб оболочки в небольшой области вокруг точек их приложения. Пусть порядок величины этой области для приложенной в точке силы f есть d (так что ее площадь $\sim d^2$). Поскольку изгиб ζ сильно меняется на протяжении расстояний d, то энергия изгиба (на единицу площади) — порядка величины $Eh^3\zeta^2/d^4$, а полная энергия изгиба (на площади $\sim d^2$) $\sim Eh^3\zeta^2/d^2$. Тензор же деформации растяжения по-прежнему $\sim \zeta/R$, и полная энергия вызванного сосредоточенной силой растяжения $\sim Eh(\zeta/R)^2\,d^2$. Поскольку энергия изгиба растет, а энергия растяжения падает с уменьшением d, то ясно, что при определении деформации вбли-

зи места приложения сосредоточенных сил должны быть учтены обе эти энергии. Величина области изгиба d определится по порядку величины из условия минимума суммы этих энергий, откуда

$$d \sim \sqrt{hR}. \tag{15.3}$$

При этом энергия $\sim Eh^2\zeta^2/R$. Варьируя ее по ζ и приравнивая работе силы f, найдем величину прогиба $\zeta \sim fR/Eh^2$.

Однако если действующие на оболочку силы достаточно велики, то в оболочке могут возникнуть выпучивания, существенно меняющие ее форму. Определение деформации в зависимости от приложенных нагрузок требует в этом своеобразном случае специального исследования [1]).

Пусть выпуклая оболочка (с краями, закрепленными так, чтобы гарантировать ее геометрическую несгибаемость) находится под действием большой сосредоточенной силы $\mathbf{f}$, направленной по внутренней нормали к поверхности. Для простоты будем считать, что оболочка представляет собой часть сферы радиуса R. Область выпучивания будет шаровым сегментом, близким к зеркальному изображению его первоначальной формы (на рис. 9 изображен меридиональный разрез оболочки). Задача состоит в определении размеров выпучивания в зависимости от величины силы.

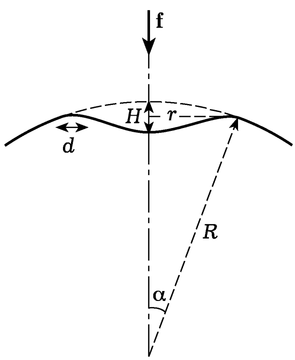


Рис. 9

Основная часть упругой энергии сконцентрирована в узкой полосе вблизи края области выпучивания, где изгиб оболочки сравнительно велик (будем называть ее полосой изгиба и обозначим ее ширину через d). Оценим эту энергию, причем будем предполагать размеры (радиус) области выпучивания $r \ll R$; тогда угол $\alpha \ll 1$ (см. рис. 9). При этом $r = R\sin\alpha \sim R\alpha$, а глубина прогиба $H = 2R(1-\cos\alpha) \sim R\alpha^2$. Обозначим через ζ смещение точек оболочки в полосе изгиба. Точно так же, как это было сделано выше, находим, что энергия изгиба вдоль меридиана и растяжения вдоль параллели [2]), отнесенные к 1 см^2

[1]) Излагаемые ниже результаты принадлежат *А.В. Погорелову* (1960). Более точный анализ данного вопроса, а также другие аналогичные задачи, можно найти в его книге «Теория оболочек при закритических деформациях». — М.: Наука, 1965.

[2]) На изгибе по меридиану кривизна оболочки в первом приближении не сказывается, так что он происходит, как и при цилиндрическом изгибе плоской пластинки, без общего растяжения по меридиану.

поверхности, по порядку величины равны соответственно

$$\frac{Eh^3\zeta^2}{d^4} \quad \text{и} \quad \frac{Eh\zeta^2}{R^2}.$$

Порядок величины смещения ζ определяется в данном случае геометрически: направление меридиана меняется на ширине d на угол $\sim \alpha$, и потому $\zeta \sim \alpha d \sim rd/R$. Умножив также на площадь полосы изгиба ($\sim rd$), получим энергии

$$\frac{Eh^3r^3}{R^2d} \quad \text{и} \quad \frac{Ehd^3r^3}{R^4}.$$

Из условия минимальности их суммы снова найдем $d \sim (hR)^{1/2}$, а полная упругая энергия при этом $\sim Er^3(h/R)^{5/2}$ или, иначе [1]),

$$\text{const} \cdot Eh^{5/2}\frac{H^{3/2}}{R}. \tag{15.4}$$

В произведенном выводе подразумевалось, что $d \ll r$; поэтому формула (15.4) справедлива при условии

$$\frac{Rh}{r^2} \ll 1. \tag{15.5}$$

При образовании выпучивания внешние слои шарового сегмента становятся внутренними и соответственно сжимаются, а внутренние — внешними и растягиваются. Относительное растяжение (или сжатие) $\sim h/R$, так что связанная с ним полная энергия в области выпучивания $\sim E(h/R)^2hr^2$. При условии (15.5) она действительно мала по сравнению с энергией в полосе изгиба (15.4).

Искомая зависимость между глубиной прогиба H и приложенной силой f получится приравниванием f к производной от энергии (15.4) по H. Таким образом, найдем

$$H \sim \frac{f^2R^2}{E^2h^5}. \tag{15.6}$$

Обратим внимание на нелинейный характер этой зависимости.

Наконец, пусть деформация (выпучивание) оболочки происходит под действием равномерного внешнего давления p. Работа внешних сил в таком случае равна $p\,\Delta V$, где $\Delta V \sim Hr^2 \sim H^2R$ — изменение ограничиваемого оболочкой объема при выпучивании. Приравняв нулю производную по H от полной свободной энергии (т. е. упругой энергии (15.4) за вычетом указанной работы), получим

$$H \sim \frac{h^5E^2}{R^4p^2}. \tag{15.7}$$

---

[1]) Более точное вычисление дает для постоянного коэффициента значение $\text{const} = 1,2(1-\sigma^2)^{-3/4}$.

Обратный характер зависимости (увеличение H при уменьшении p) указывает на неустойчивость выпученного состояния в этом случае. Определяемое формулой (15.7) значение H отвечает неустойчивому равновесию при заданном p: выпучивания с бо́льшими значениями H самопроизвольно растут, а с меньшими — уменьшаются (легко проверить, что (15.7) отвечает максимуму, а не минимуму полной свободной энергии). Существует такое критическое значение внешней нагрузки $p = p_{\text{кр}}$, за которым самопроизвольно возрастают уже малые изменения формы оболочки. Его можно оценить как то значение p, при котором формула (15.7) дает $H \sim h$:

$$p_{\text{кр}} \sim \frac{Eh^2}{R^2}. \tag{15.8}$$

Мы ограничимся в теории оболочек изложенными краткими сведениями и некоторыми простыми примерами, приведенными в задачах к этому параграфу.

Задачи

1. Вывести уравнения равновесия для сферической оболочки (радиуса R), деформируемой симметрично относительно оси, проходящей через ее центр.

Решение. В качестве двумерных координат на поверхности оболочки пользуемся углами θ, φ сферической системы координат с началом в центре сферы и полярной осью по оси симметрии деформированной оболочки.

Пусть P_r — отнесенная к единице поверхности оболочки радиальная внешняя сила. Эта сила должна компенсироваться радиальной равнодействующей сил внутренних напряжений, действующих на элемент оболочки в тангенциальных к нему направлениях. Соответствующее условие гласит:

$$\frac{h}{R}(\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\theta\theta}) = P_r. \tag{1}$$

Это уравнение в точности аналогично известному уравнению Лапласа, определяющему разность давлений двух сред, связанную с действующим в поверхности их раздела поверхностным напряжением.

Пусть, далее, $Q_z(\theta)$ есть направленная вдоль полярной оси (оси z) равнодействующая всех внешних сил, действующих на часть оболочки, расположенную над параллельным кругом $\theta = \text{const}$. Эта сила должна компенсироваться проекцией на ось z напряжений $2\pi R \sin\theta h \sigma_{\theta\theta}$, действующих на сечение $2\pi Rh \sin\theta$ оболочки по указанной окружности. Отсюда

$$2\pi Rh \sin^2\theta \sigma_{\theta\theta} = Q_z(\theta). \tag{2}$$

Уравнениями (1) и (2) определяется распределение напряжений, после чего тензор деформации находится по формулам

$$u_{\theta\theta} = \frac{1}{E}(\sigma_{\theta\theta} - \sigma\sigma_{\varphi\varphi}), \quad u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{E}(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma\sigma_{\theta\theta}), \quad u_{\theta\varphi} = 0, \tag{3}$$

а затем вектор смещения с помощью уравнений

$$u_{\theta\theta} = \frac{1}{R}\left(\frac{du_\theta}{d\theta} + u_r\right), \quad u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{R}(u_\theta \operatorname{ctg}\theta + u_r). \tag{4}$$

2. Определить деформацию под влиянием собственного веса полусферической оболочки, расположенной куполом вверх; края купола свободно перемещаются по горизонтальной опоре (рис. 10).

Решение. Имеем

$$P_r = -\rho g h \cos\theta, \quad Q_z = -2\pi R^2(1-\cos\theta)\rho g h$$

(Q_z есть полный вес оболочки над окружностью $\theta = \text{const}$). Из (1) и (2) находим

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{R\rho g}{1+\cos\theta}, \quad \sigma_{rr} = -R\rho g\left(\frac{1}{1+\cos\theta} - \cos\theta\right).$$

По формулам (3) вычисляем $u_{\varphi\varphi}$ и $u_{\theta\theta}$, после чего из уравнений (4) вычисляем u_θ и u_r (постоянная, возникающая при интегрировании первого из этих уравнений, определяется так, чтобы при $\theta = \pi/2$ было $u_\theta = 0$). В результате получим

$$u_\theta = \frac{R^2\rho g(1+\sigma)}{E}\left[\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta} + \ln(1+\cos\theta)\right]\sin\theta,$$

$$u_r = \frac{R^2\rho g(1+\sigma)}{E}\left[1 - \frac{2+\sigma}{1+\sigma}\cos\theta - \cos\theta\ln(1+\cos\theta)\right].$$

Значение u_r при $\theta = \pi/2$ дает горизонтальное смещение опоры.

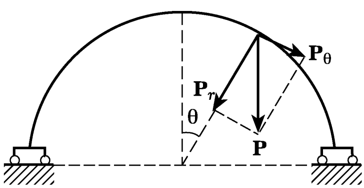


Рис. 10

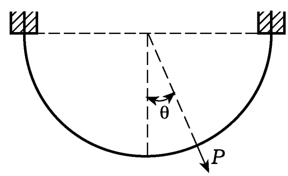


Рис. 11

3. Определить деформацию полусферической оболочки с закрепленными краями, расположенной куполом вниз и наполненной жидкостью (рис. 11); весом самой оболочки можно пренебречь по сравнению с весом жидкости.

Решение. Имеем

$$P_r = \rho_0 g R\cos\theta, \quad P_\theta = 0,$$

$$Q_z = 2\pi R^2\int_0^\theta P_r\cos\theta\,\sin\theta\,d\theta = \frac{2\pi R^3\rho_0 g}{3}(1-\cos^3\theta)$$

(ρ_0 — плотность жидкости). Далее, по формулам (1) и (2) находим

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{R^2\rho_0 g}{3h}\frac{1-\cos^3\theta}{\sin^2\theta}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{R^2\rho_0 g}{3h}\frac{(-1+3\cos\theta-2\cos^3\theta)}{\sin^2\theta}.$$

Для смещений получается

$$u_\theta = -\frac{R^3\rho_0 g(1+\sigma)}{3Eh}\sin\theta\left[\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta} + \ln(1+\cos\theta)\right],$$

$$u_r = \frac{R^3\rho_0 g(1+\sigma)}{3Eh}\left[\cos\theta\ln(1+\cos\theta) - 1 + \frac{3\cos\theta}{1+\sigma}\right].$$

При $\theta = \pi/2$ u_r остается конечным, а не обращается в нуль, как должно было быть. Это значит, что в действительности вблизи линии закрепления оболочки происходит настолько сильный ее изгиб, что полученное решение становится неприменимым.

4. Оболочка в виде шарового сегмента опирается своими свободными краями на неподвижную опору (рис. 12). Определить величину ее прогиба под действием собственного веса Q.

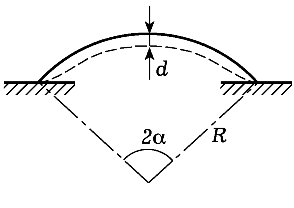


Рис. 12

Решение. Основная деформация происходит вблизи краев, отгибающихся в сторону (штриховая линия на рис. 12). При этом смещение u_θ мало по сравнению с радиальным смещением $u_r \equiv \zeta$. Поскольку ζ быстро убывает по мере удаления от линии опоры, то возникающую деформацию можно рассматривать как деформацию плоской длинной (длины $2\pi R\sin\alpha$) пластинки. Эта деформация складывается из изгиба и растяжения пластинки. Относительное удлинение пластинки в каждой ее точке равно ζ/R (R — радиус оболочки), и потому энергия растяжения (на единицу объема) есть $E\zeta^2/2R^2$. Вводя в качестве независимой переменной расстояние x от линии опоры, имеем для полной энергии растяжения

$$F_{1\text{пл}} = 2\pi R\sin\alpha\frac{hE}{2R^2}\int\zeta^2\,dx.$$

Энергия же изгиба есть

$$F_{2\text{пл}} = 2\pi R\sin\alpha\frac{h^3E}{24(1-\sigma^2)}\int\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2}\right)^2 dx.$$

Варьируя сумму $F_{\text{пл}} = F_{1\text{пл}} + F_{2\text{пл}}$ по ζ, получим уравнение

$$\frac{d^4\zeta}{dx^4} + \frac{12(1-\sigma^2)}{h^2R^2}\zeta = 0.$$

При $x\to\infty$ ζ должно стремиться к нулю, а при $x = 0$ должны выполняться граничные условия равенства нулю момента сил: $\zeta'' = 0$, и условие равенства развивающейся при изгибе силы нормальной к поверхности оболочки компоненте силы тяжести:

$$2\pi R\sin\alpha\frac{h^3E}{12(1-\sigma^2)}\zeta''' = Q\cos\alpha.$$

Удовлетворяющее этим условиям решение есть

$$\zeta = Ae^{-\varkappa x}\cos\varkappa x,$$

где

$$\varkappa = \left[\frac{3(1-\sigma^2)}{h^2R^2}\right]^{1/4}, \quad A = \frac{Q\operatorname{ctg}\alpha}{Eh}\left[\frac{3R^2(1-\sigma^2)}{8\pi h^3}\right]^{1/4}.$$

Величина прогиба оболочки есть

$$d = \zeta(0)\cos\alpha = A\cos\alpha.$$

§ 16. Кручение стержней

Перейдем теперь к изучению деформаций тонких стержней. Этот случай отличается от всех ранее рассматривавшихся тем, что вектор смещения **u** может быть большим даже при слабой деформации, т. е. при малом тензоре u_{ik} [1]). Так, при слабом сгибании тонкого длинного стержня его концы могут значительно переместиться в пространстве, даже если относительные смещения соседних точек в стержне малы.

Существует два типа деформаций стержней, могущих сопровождаться большим смещением отдельных частей стержня. Одним из них является изгиб стержня, а вторым — его *кручение*. С рассмотрения этого второго случая мы и начнем.

Деформация кручения заключается в том, что в стержне, остающемся при этом прямым, каждое поперечное сечение поворачивается относительно ниже лежащих на некоторый угол. Если стержень длинный, то при слабом кручении достаточно удаленные друг от друга сечения могут повернуться на большой угол. Образующие боковой поверхности стержня, параллельные его оси, приобретают при кручении винтовую форму.

Рассмотрим тонкий прямой стержень произвольного сечения. Выберем систему координат с осью z вдоль оси стержня и началом координат где-нибудь внутри него. Введем *угол кручения* τ как угол поворота, отнесенный к единице длины стержня. Это значит, что два бесконечно близких поперечных сечения, находящихся на расстоянии dz, поворачиваются друг относительно друга на угол $d\varphi = \tau\, dz$ (так что $\tau = d\varphi/dz$). Сама деформация кручения, т. е. относительные смещения соседних частей стержня, предполагаются малыми. Условием этого является малость относительного поворота сечений, удаленных вдоль длины стержня на расстояния порядка его поперечных размеров R, т. е.

$$\tau R \ll 1. \tag{16.1}$$

Рассмотрим небольшую область длины стержня вблизи начала координат и определим смещения **u** точек стержня в этой области. В качестве несмещенного выберем поперечное сечение стержня в координатной плоскости xy. Как известно, при повороте радиус-вектора **r** на малый угол $\delta\varphi$ смещение его конца определяется формулой

$$\delta\mathbf{r} = [\delta\boldsymbol{\varphi}\, \mathbf{r}], \tag{16.2}$$

где $\delta\boldsymbol{\varphi}$ — вектор с абсолютной величиной, равной углу поворота, направленный вдоль оси, вокруг которой производится поворот.

---

[1]) Исключением является только простое растяжение стержня без изменения его формы, — при слабом растяжении наряду с тензором u_{ik} всегда мал также и вектор **u**.

В нашем случае поворот производится вокруг оси z, причем для точек с координатой z угол поворота относительно плоскости xy равен τz (угол τ в области вблизи начала координат можно рассматривать как постоянный). Формула (16.2) дает теперь для компонент u_x, u_y вектора смещения

$$u_x = -\tau z y, \quad u_y = \tau z x. \tag{16.3}$$

При кручении стержня его точки испытывают, вообще говоря, также и смещение вдоль оси z. Поскольку при $\tau = 0$ это смещение отсутствует, то при малых τ его можно считать пропорциональным τ. Таким образом,

$$u_z = \tau\psi(x, y), \tag{16.4}$$

где $\psi(x, y)$ — некоторая функция от x и y, называемая *функцией кручения*. В результате описываемой формулами (16.3) и (16.4) деформации каждое поперечное сечение стержня поворачивается вокруг оси z, одновременно искривляясь, переставая быть плоским. Следует заметить, что, выбрав определенным образом начало координат в плоскости xy, мы тем самым «закрепляем» определенную точку сечения стержня так, что она не смещается в этой плоскости (смещаясь, однако, вдоль оси z); изменение выбора начала координат не отразилось бы, разумеется, на самой деформации кручения, приведя лишь к несущественному общему смещению стержня как целого.

Зная $\mathbf{u}$, можно найти компоненты тензора деформации. Поскольку $\mathbf{u}$ в рассматриваемой области мало, то можно воспользоваться формулой $u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$. В результате находим

$$\begin{gathered} u_{xx} = u_{yy} = u_{xy} = u_{zz} = 0, \\ u_{xz} = \frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - y\right), \quad u_{yz} = \frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + x\right). \end{gathered} \tag{16.5}$$

Обращаем внимание на то, что $u_{ll} = 0$; другими словами, кручение не сопровождается изменением объема, т. е. представляет собой деформацию чистого сдвига.

Для компонент тензора напряжений находим

$$\begin{gathered} \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0, \\ \sigma_{xz} = 2\mu u_{xz} = \mu\tau\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - y\right), \quad \sigma_{yz} = 2\mu u_{yz} = \mu\tau\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + x\right) \end{gathered} \tag{16.6}$$

(здесь удобнее пользоваться модулем сдвига μ вместо E и σ). Поскольку отличны от нуля только σ_{xz} и σ_{yz}, то общие уравнения равновесия $\partial\sigma_{ik}/\partial x_k = 0$ сводятся к уравнению

$$\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial y} = 0. \tag{16.7}$$

Подставив сюда (16.6), мы найдем, что функция кручения должна удовлетворять уравнению

$$\Delta\psi = 0, \tag{16.8}$$

где Δ — двумерный оператор Лапласа.

Несколько более удобно, однако, пользоваться другой вспомогательной функцией $\chi(x, y)$, определяемой равенствами

$$\sigma_{xz} = 2\mu\tau\frac{\partial\chi}{\partial y}, \quad \sigma_{yz} = -2\mu\tau\frac{\partial\chi}{\partial x}; \tag{16.9}$$

для этой функции получаются более удобные граничные условия на контуре сечения стержня (см. ниже). Сравнив (16.9) с (16.6), получим

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = y + 2\frac{\partial\chi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = -x - 2\frac{\partial\chi}{\partial x}. \tag{16.10}$$

Дифференцируя первое равенство по y, второе по x и вычитая одно из другого, получим для функции χ следующее уравнение:

$$\Delta\chi = -1. \tag{16.11}$$

Для определения граничных условий на поверхности стержня замечаем, что благодаря малой толщине стержня действующие на его боковую поверхность внешние силы малы по сравнению с возникающими в стержне внутренними напряжениями и потому могут быть положены (при отыскании граничных условий) равными нулю. Это обстоятельство в точности аналогично тому, что мы имели при рассмотрении изгиба тонких пластинок. Таким образом, на боковой поверхности стержня должно быть $\sigma_{ik}n_k = 0$; поскольку ось z направлена по оси стержня, то вектор нормали $\mathbf{n}$ имеет только компоненты n_x, n_y, так что написанное уравнение сводится к условию

$$\sigma_{zx}n_x + \sigma_{zy}n_y = 0.$$

Подставляя сюда (16.9), получаем

$$\frac{\partial\chi}{\partial y}n_x - \frac{\partial\chi}{\partial x}n_y = 0.$$

Но компоненты вектора нормали к плоскому контуру (контуру сечения стержня) равны $n_x = -\dfrac{dy}{dl}$, $n_y = \dfrac{dx}{dl}$, где x, y — координаты точек контура, а dl — элемент дуги. Таким образом, получаем

$$\frac{\partial\chi}{\partial x}dx + \frac{\partial\chi}{\partial y}dy = d\chi = 0,$$

откуда $\chi = \text{const}$, т. е. на контуре сечения функция χ постоянна. Поскольку в определения (16.9) входят только производные от функции χ, то ясно, что к этой функции можно прибавлять

любую постоянную. Если контур сечения односвязен, то можно, следовательно, без всякого ограничения общности положить на нем в качестве граничного условия к уравнению (16.11) [1])

$$\chi = 0. \tag{16.12}$$

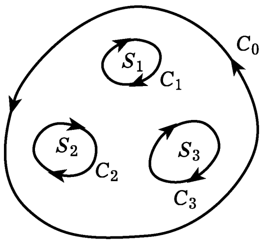


Рис. 13

В случае же многосвязного контура χ будет иметь различные постоянные значения на каждой из замкнутых кривых, составляющих контур. Поэтому положить χ равным нулю можно будет лишь на одной из этих кривых, например на внешнем контуре (C_0 на рис. 13). Значения же χ на остальных частях контура определятся из условия, являющегося следствием однозначности смещения $u_z = \tau\psi(x, y)$ как функции координат. Именно, ввиду однозначности функции кручения $\psi(x, y)$ интеграл от ее дифференциала $d\psi$ по замкнутому контуру должен быть равен нулю. С помощью соотношений (16.10) имеем поэтому

$$\oint d\psi = \oint \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \right) =$$
$$= -2 \oint \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} dy - \frac{\partial \chi}{\partial y} dx \right) - \oint (x\, dy - y\, dx) = 0,$$

или

$$\oint \frac{\partial \chi}{\partial n}\, dl = -S, \tag{16.13}$$

где $\partial\chi/\partial n$ есть производная функции χ по направлению внешней нормали к контуру, а S — охватываемая этим контуром площадь. Применяя (16.13) к каждой из замкнутых кривых $C_1, C_2, \ldots$, мы и получим искомые условия.

Определим свободную энергию подвергнутого кручению стержня. Для энергии единицы объема имеем

$$F = \frac{\sigma_{ik} u_{ik}}{2} = \sigma_{xz} u_{xz} + \sigma_{yz} u_{yz} = \frac{1}{2\mu} (\sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2)$$

[1]) Задача об определении деформации кручения по уравнению (16.11) с граничным условием (16.12) формально совпадает с задачей об определении формы прогиба равномерно нагруженной плоской мембраны по уравнению (14.9).

Полезно заметить также гидродинамическую аналогию: уравнением вида (16.11) определяется распределение скоростей $v(x, y)$ вязкой жидкости по сечению трубы; граничному условию (16.12) соответствует условие $v = 0$ на неподвижных стенках трубы (см. VI, § 17).

и, подставляя сюда (16.9):

$$F = 2\mu\tau^2\left[\left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)^2\right] \equiv 2\mu\tau^2(\nabla\chi)^2,$$

где ∇ означает двумерный градиент. Энергия кручения, отнесенная к единице длины стержня, получится отсюда интегрированием по площади поперечного сечения, т. е. равна $C\tau^2/2$, где коэффициент C равен

$$C = 4\mu\int(\nabla\chi)^2\,df.$$

Величину C называют *крутильной жесткостью* стержня. Полная упругая энергия стержня равна интегралу

$$F_{\text{ст}} = \frac{1}{2}\int C\tau^2\,dz, \tag{16.14}$$

взятому по его длине.

Написав

$$(\nabla\chi)^2 = \nabla(\chi\nabla\chi) - \chi\Delta\chi = \nabla(\chi\nabla\chi) + \chi$$

и преобразуя интеграл от первого члена в интеграл по линии контура сечения стержня, получим

$$C = 4\mu\oint\chi\frac{\partial\chi}{\partial n}\,dl + 4\mu\int\chi\,df. \tag{16.15}$$

Если контур сечения односвязен, то ввиду граничного условия $\chi = 0$ первый член исчезает и остается

$$C = 4\mu\int\chi\,dx\,dy. \tag{16.16}$$

Для многосвязной же границы (см. рис. 13), положив $\chi = 0$ на внешнем контуре C_0 и обозначив через χ_k постоянные значения χ на внутренних контурах C_k, получим с помощью (16.13)

$$C = 4\mu\sum_k\chi_k S_k + 4\mu\int\chi\,dx\,dy \tag{16.17}$$

(следует помнить, что при интегрировании в первом члене в (16.15) контур C_0 обходится в прямом, а контур C_k — в обратном направлениях).

Рассмотрим наиболее обычный случай кручения, когда один из концов стержня закреплен неподвижно, а внешние силы приложены только к поверхности другого его конца. Эти силы таковы, что производят только кручение стержня без какой бы то ни было другой его деформации, например изгиба. Другими словами, они составляют некоторую пару сил, закручивающую стержень вокруг его оси. Момент этой пары обозначим через M.

Естественно ожидать, что в таком случае угол кручения τ постоянен вдоль длины стержня. В этом можно убедиться, например, из условия минимума полной свободной энергии стержня в равновесии. Полная энергия деформированного стержня равна сумме $F_{\text{ст}} + U$, где U — потенциальная энергия, обусловленная действием внешних сил. Подставляя в (16.14) $\tau = d\varphi/dz$ и варьируя по углу φ, находим

$$\delta\frac{1}{2}\int C\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 dz + \delta U = \int C\frac{d\varphi}{dz}\frac{d\delta\varphi}{dz}\,dz + \delta U = 0,$$

или, интегрируя по частям,

$$-\int C\frac{d\tau}{dz}\delta\varphi\,dz + \delta U + C\tau\delta\varphi = 0.$$

В последнем члене слева берется разность значений на пределах интегрирования, т. е. на концах стержня. Один из этих концов, скажем нижний, закреплен так, что на нем $\delta\varphi = 0$. Что касается вариации δU потенциальной энергии, то, взятая с обратным знаком, она представляет собой работу внешних сил при повороте на угол $\delta\varphi$. Как известно из механики, работа пары сил при таком повороте равна произведению $M\delta\varphi$ угла поворота на момент пары. Поскольку никаких других внешних сил нет, то $\delta U = -M\delta\varphi$, и мы получаем

$$\int C\frac{d\tau}{dz}\delta\varphi\,dz + \delta\varphi(-M + C\tau) = 0. \qquad (16.18)$$

Во втором члене берется его значение на верхнем пределе. В интеграле по dz вариация $\delta\varphi$ произвольна, а потому должно быть $C d\tau/dz = 0$, т. е.

$$\tau = \text{const}. \qquad (16.19)$$

Таким образом, угол кручения постоянен вдоль всей длины стержня. Полный угол поворота верхнего основания относительно нижнего равен поэтому просто произведению τl угла τ на длину l стержня.

В уравнении (16.18) должен исчезнуть также и второй член. Отсюда находим следующее выражение для постоянного угла кручения:

$$\tau = \frac{M}{C}. \qquad (16.20)$$

Задачи

1. Определить крутильную жесткость стержня с круговым сечением (радиуса R).

Решение. Решения задач 1–4 формально совпадают с решениями задач о движении вязкой жидкости в трубе соответствующего сечения (см. примеч. на с. 94); количеству Q протекающей через сечение трубы жидкости соответствует здесь величина C.

Для стержня кругового сечения имеем (начало координат в центре сечения)

$$\chi = \frac{1}{4}(R^2 - x^2 - y^2).$$

Крутильная жесткость:

$$C = \frac{\mu\pi R^4}{2}.$$

Для функции ψ получаем из (16.10) $\psi = \text{const}$. Но постоянная ψ соответствует, согласно (16.4), простому смещению стержня как целого вдоль оси z, поэтому можно считать, что $\psi = 0$. Таким образом, поперечные сечения кругового стержня при кручении остаются плоскими.

2. То же для стержня эллиптического сечения (полуоси a и b).

Решение. Крутильная жесткость:

$$C = \pi\mu\frac{a^3b^3}{a^2+b^2}.$$

Распределение продольных смещений дается функцией кручения:

$$\psi = \frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}\,xy$$

(оси координат направлены по осям эллипса).

3. То же для стержня с сечением в виде равностороннего треугольника (длина сторон a).

Решение. Крутильная жесткость:

$$C = \frac{\sqrt{3}}{80}\,\mu a^4.$$

Функция кручения

$$\psi = \frac{1}{6a}y(x\sqrt{3}+y)(x\sqrt{3}-y),$$

причем начало координат выбрано в центре треугольника, а ось x совпадает с одной из его высот.

4. То же для стержня, имеющего вид длинной тонкой пластинки (ширина d, толщина $h \ll d$).

Решение. Задача эквивалентна задаче о течении вязкой жидкости между плоскопараллельными стенками. Результат:

$$C = \frac{\mu\, dh^3}{3}.$$

5. То же для цилиндрической трубы (внутренний и внешний радиусы R_1 и R_2).

Решение. Функция

$$\chi = \frac{1}{4}(R_2^2 - r^2)$$

(в полярных координатах) удовлетворяет условию (16.13) на обеих границах кольцевого сечения трубы. По формуле (16.17) найдем

$$C = \frac{\pi}{2}\mu(R_2^4 - R_1^4).$$

6. То же для тонкостенной трубы произвольного сечения.

Решение. Ввиду тонкости стенки трубы можно считать, что на протяжении ее ширины h функция χ меняется от нуля на одной стороне до χ_1 на другой по линейному закону $\chi = \chi_1 y/h$ (y — координата вдоль толщины

стенки). Тогда условие (16.13) дает $\chi_1 L/h = S$, где L — длина периметра сечения трубы, а S — охватываемая им площадь. В выражении (16.17) второй член мал по сравнению с первым, и мы получаем

$$C = \frac{4hS^2\mu}{L}.$$

Если трубу разрезать продольно по одной из ее образующих, то крутильная жесткость резко уменьшается, становясь равной (согласно результату задачи 4) $C = \mu L h^3/3$.

§ 17. Изгиб стержней

В изогнутом стержне в некоторых местах его происходит растяжение, а в других — сжатие. Растянуты линии на выпуклой стороне изогнутого стержня, а на вогнутой стороне происходит сжатие. Как и в случае пластинок, вдоль длины стержня внутри него существует «нейтральная» поверхность, на которой не происходит ни растяжения, ни сжатия. Она отделяет собой области сжатия от областей растяжения.

Начнем с исследования деформации изгиба в небольшом участке длины стержня, в котором изгиб можно считать слабым; под слабым мы понимаем здесь изгиб, при котором мал не только тензор деформации, но и абсолютная величина смещений точек стержня. Выберем систему координат с началом в некоторой точке нейтральной поверхности внутри рассматриваемого участка стержня. Ось z направим параллельно оси стержня (недеформированного); изгиб пусть происходит в плоскости zx. При слабом изгибании стержня можно считать, что изгиб происходит в одной плоскости. Это связано с известным из дифференциальной геометрии обстоятельством, что отклонение слабо изогнутой кривой от плоскости (так называемое ее кручение) является малой величиной высшего порядка по сравнению с кривизной.

Аналогично тому, что мы имели в случае изгиба пластинок и кручения стержней, и при изгибе тонких стержней внешние силы, действующие на боковую поверхность стержня, малы по сравнению с возникающими внутри стержня напряжениями, и при определении граничных условий на этой поверхности их можно считать равными нулю. Таким образом, вдоль всей боковой поверхности стержня имеем $\sigma_{ik} n_k = 0$, или, поскольку $n_z = 0$,

$$\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y = 0$$

и аналогично для $i = y, z$. Выберем такую точку на контуре поперечного сечения стержня, в которой нормаль $\mathbf{n}$ направлена параллельно оси x. Другая такая же точка имеется где-нибудь на противоположной стороне контура. В обеих этих точках $n_y = 0$, и из написанного выше равенства имеем $\sigma_{xx} = 0$. Но поскольку

самый стержень предполагается тонким, то, если σ_{xx} исчезает на двух сторонах его сечения, оно мало и вдоль всего сечения, так что можно положить $\sigma_{xx} = 0$ во всем стержне. Аналогичным образом убеждаемся в том, что все компоненты тензора напряжений должны быть равными нулю, за исключением только компоненты σ_{zz}. Другими словами, при изгибе тонкого стержня большой является только растягивающая (или сжимающая) компонента тензора внутренних напряжений. Деформация, в которой отлична от нуля только компонента σ_{zz} тензора напряжений, есть не что иное, как деформация простого растяжения или сжатия (§ 5). Таким образом, в каждом элементе объема изгибаемого стержня происходит простое растяжение (или сжатие). Самая величина этого растяжения, конечно, различна в разных точках каждого из поперечных сечений стержня, что и приводит в результате к изгибу всего стержня.

Легко определить величину относительного растяжения в каждой точке стержня. Рассмотрим какой-нибудь элемент длины dz, параллельный оси стержня и находящийся где-нибудь вблизи начала координат. При изгибании стержня длина dz изменится, сделавшись равной dz'. Неизменными остаются только те элементы длины, которые расположены на нейтральной поверхности. Пусть R есть радиус кривизны нейтральной поверхности вблизи начала координат. Длины dz и dz' можно рассматривать как элементы дуги окружностей с радиусами соответственно R и $R+x$, где x — значение координаты x в точке, в которой выбран элемент dz'. Поэтому

$$dz' = \frac{R+x}{R}\,dz = \left(1 + \frac{x}{R}\right) dz.$$

Относительное удлинение равно, следовательно,

$$\frac{dz' - dz}{dz} = \frac{x}{R}.$$

С другой стороны, относительное удлинение элемента длины dz равно компоненте u_{zz} тензора деформации. Следовательно,

$$u_{zz} = \frac{x}{R}. \tag{17.1}$$

Мы можем написать теперь σ_{zz}, воспользовавшись непосредственно соотношением $\sigma_{zz} = Eu_{zz}$, имеющим место при простом растяжении. Таким образом,

$$\sigma_{zz} = \frac{x}{R}E. \tag{17.2}$$

До сих пор еще расположение нейтральной поверхности в изогнутом стержне оставалось неопределенным. Его можно определить из условия, что рассматриваемая нами здесь деформация должна представлять собой чистый изгиб, без какого бы

то ни было общего растяжения или сжатия стержня. Для этого полная сила внутренних напряжений, действующая на поперечное сечение стержня, должна быть равной нулю, т. е. должен исчезать интеграл

$$\int \sigma_{zz}\, df,$$

взятый по этой поверхности. В связи с выражением (17.2) для σ_{zz} это приводит к условию

$$\int x\, df = 0. \tag{17.3}$$

С другой стороны, можно ввести понятие о центре инерции сечения стержня, как о центре инерции однородного плоского диска соответствующей формы. Координаты этого центра:

$$\frac{\int x\, df}{\int df}, \quad \frac{\int y\, df}{\int df}.$$

Таким образом, условие (17.3) означает, что в системе координат с началом, лежащим на нейтральной поверхности, x-координата центра инерции сечения стержня равна нулю. Другими словами, нейтральная поверхность проходит через центры инерции поперечных сечений стержня.

Помимо u_{zz} отличны от нуля еще две компоненты тензора деформации, так как при простом растяжении имеем $u_{xx} = u_{yy} = -\sigma u_{zz}$. Зная тензор деформации, легко найти также и смещения точек. Пишем:

$$u_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{x}{R}, \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{\sigma x}{R},$$
$$\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0.$$

Интегрирование этих соотношений приводит к следующим выражениям для компонент перемещения:

$$u_x = -\frac{1}{2R}[z^2 + \sigma(x^2 - y^2)], \quad u_y = -\sigma\frac{xy}{R}, \quad u_z = \frac{xz}{R}. \tag{17.4}$$

Постоянные интегрирования положены равными нулю; это значит, что мы закрепляем в пространстве положение начала координат.

Из формул (17.4) видно, что точки, расположенные в поперечном сечении $z = \text{const} \equiv z_0$, после изгиба заполняют поверхность

$$z = z_0 + u_z = z_0\left(1 + \frac{x}{R}\right).$$

Мы видим, что в рассматриваемом приближении сечения остаются при изгибе плоскими, лишь поворачиваясь на некоторый

угол относительно своего первоначального положения. Форма же сечения меняется; так при изгибе стержня прямоугольного сечения (со сторонами a и b) боковые стороны контура сечения $y = \pm b/2$ после изгиба занимают положения

$$y = \pm\frac{b}{2} + u_y = \pm\frac{b}{2}\left(1 - \frac{\sigma x}{R}\right),$$

т. е. становятся наклонными, оставаясь прямыми. Верхняя же и нижняя стороны $x = \pm a/2$ изгибаются в параболические кривые (рис. 14):

$$x = \pm\frac{a}{2} + u_x = \pm\frac{a}{2} - \frac{1}{2R}\left[z_0^2 + \sigma\left(\frac{a^2}{4} - y^2\right)\right].$$

Свободная энергия единицы объема стержня:

$$\frac{\sigma_{ik}u_{ik}}{2} = \frac{\sigma_{zz}u_{zz}}{2} = \frac{Ex^2}{2R^2}.$$

Интегрируя по всему поперечному сечению стержня, имеем

$$\frac{E}{2R^2}\int x^2\,df. \tag{17.5}$$

Это есть свободная энергия единицы длины изогнутого стержня. Радиус кривизны R определен здесь как радиус кривизны нейтральной поверхности. Но в силу тонкости стержня здесь с той же точностью R можно считать просто радиусом кривизны самого изогнутого стержня, рассматриваемого как не имеющая толщины линия (об этой линии часто говорят как об *упругой линии*).

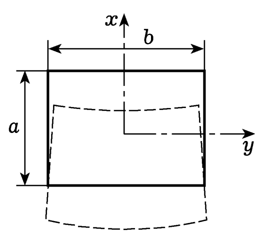


Рис. 14

В выражении (17.5) удобно ввести понятие момента инерции площади поперечного сечения стержня. Именно, определим момент инерции сечения относительно проходящей через его плоскость оси y как интеграл:

$$I_y = \int x^2\,df, \tag{17.6}$$

т. е. аналогично обычному понятию момента инерции с той только разницей, что вместо элемента массы стоит просто элемент поверхности df. Тогда свободная энергия единицы длины стержня запишется в виде

$$\frac{E}{2R^2}I_y. \tag{17.7}$$

Определим еще момент сил внутренних напряжений, действующих в данном сечении стержня (этот момент называют изгибающим). К элементу df поверхности сечения приложена сила

$\sigma_{zz}\,df = \dfrac{x}{R}E\,df$, направленная вдоль оси z. Ее момент относительно оси y есть $x\sigma_{zz}\,df$. Поэтому полный момент сил относительно этой оси есть

$$M_y = \frac{E}{R}\int x^2\,df = \frac{EI_y}{R}. \tag{17.8}$$

Таким образом, кривизна $1/R$ упругой линии пропорциональна действующему в данном сечении изгибающему моменту.

Величина I_y зависит от того, как направлена ось y в плоскости сечения. Удобно, как это принято в механике, выражать I_y через два так называемых главных момента инерции. Если θ есть угол между осью y и одной из главных осей инерции сечения стержня, то, как известно,

$$I_y = I_1\cos^2\theta + I_2\sin^2\theta, \tag{17.9}$$

где I_1, I_2 — главные моменты инерции. Плоскости, проходящие через ось z и главные оси инерции сечения стержня, называют главными плоскостями изгиба.

Если, например, сечение стержня является прямоугольником (со сторонами a и b), то его центр инерции находится в центре прямоугольника, а главные оси инерции параллельны его сторонам. Главные моменты инерции равны

$$I_1 = \frac{a^3b}{12}, \quad I_2 = \frac{ab^3}{12}. \tag{17.10}$$

При круговом сечении (с радиусом R) центр инерции находится в центре круга, а направление главных осей инерции произвольно. Момент инерции вокруг любой оси, проходящей в плоскости сечения через его центр, равен

$$I = \frac{\pi R^4}{4}. \tag{17.11}$$

§ 18. Энергия деформированного стержня

В предыдущем параграфе мы рассматривали только небольшую область вдоль длины изогнутого стержня. Переходя теперь к исследованию деформации во всем стержне, необходимо начать с выбора подходящего способа описания такой деформации. Существенно, что при сильном [1]) изгибе стержня в нем одновременно возникает, вообще говоря, также и некоторая деформация кручения, так что результирующая деформация есть комбинация чистого изгиба и кручения.

---

[1]) Напомним, что под сильной мы понимаем здесь такую деформацию, при которой вектор $\mathbf{u}$ не мал, тензор же деформации по-прежнему является малым.

Для описания деформации удобно поступить следующим образом. Разделим весь стержень на ряд бесконечно малых элементов, каждый из которых вырезается из стержня двумя бесконечно близкими поперечными сечениями. В каждом таком элементе введем свою систему координат ξ, η, ζ; направления осей выберем таким образом, чтобы в недеформированном стержне все эти системы были параллельны друг другу, причем все оси ζ направлены параллельно оси стержня. При изгибании стержня в каждом элементе система координат поворачивается, причем в различных элементах, вообще говоря, различным образом. Каждые две бесконечно близкие системы оказываются при этом повернутыми друг относительно друга на некоторый бесконечно малый угол.

Пусть $d\boldsymbol{\varphi}$ — вектор угла относительного поворота двух систем, находящихся на расстоянии dl вдоль длины стержня (как известно, бесконечно малый угол поворота можно рассматривать как вектор, направленный вдоль оси поворота; его составляющие представляют собою углы поворота вокруг каждой из трех осей координат).

Для описания деформации мы введем вектор

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dl}, \tag{18.1}$$

определяющий «скорость» поворота осей координат вдоль длины стержня. Если деформация является чистым кручением, то поворот последовательных систем координат происходит только вокруг оси стержня, т. е. вокруг осей ζ. В этом случае, следовательно, вектор $\boldsymbol{\Omega}$ направлен вдоль оси стержня и представляет собой не что иное, как угол кручения τ, которым мы пользовались в § 16. Соответственно этому и в общем случае произвольной деформации компоненту Ω_ζ вектора $\boldsymbol{\Omega}$ можно назвать углом кручения. При чистом же изгибе стержня в одной плоскости вектор $\boldsymbol{\Omega}$ не имеет компоненты Ω_ζ, т. е. лежит в каждой точке целиком в плоскости $\xi\eta$. Если при этом выбрать плоскость, в которой происходит изгиб, в качестве плоскости $\xi\zeta$, то поворот происходит в каждой точке вокруг оси η, т. е. $\boldsymbol{\Omega}$ параллелен оси η.

Введем единичный вектор $\mathbf{t}$, направленный по касательной к стержню, рассматриваемому здесь просто как упругая линия. Производная $d\mathbf{t}/dl$ называется вектором кривизны линии; его абсолютная величина равна $1/R$, где R — радиус кривизны [1]), а его направление называется направлением главной нормали

[1]) Напомним, что всякая кривая в пространстве характеризуется в каждой точке своими так называемыми кривизной и кручением. Это кручение (нам не придется пользоваться им) не следует смешивать с тем, что мы называем здесь деформацией кручения, представляющей собой закручивание стержня вокруг его оси.

кривой. Изменение вектора при бесконечно малом повороте равно векторному произведению вектора угла поворота на сам рассматриваемый вектор. Поэтому для разности векторов $\mathbf{t}$ в двух бесконечно близких точках упругой линии можно написать:

$$d\mathbf{t} = [d\boldsymbol{\varphi}\mathbf{t}],$$

или, разделив на dl:

$$\frac{d\mathbf{t}}{dl} = [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{t}]. \tag{18.2}$$

Умножив это равенство с обеих сторон векторно на $\mathbf{t}$, получаем

$$\boldsymbol{\Omega} = \left[\mathbf{t}\frac{d\mathbf{t}}{dl}\right] + \mathbf{t}(\mathbf{t}\boldsymbol{\Omega}). \tag{18.3}$$

Направление вектора касательной в каждой точке совпадает с направлением оси ζ в этой же точке. Поэтому $(\mathbf{t}\boldsymbol{\Omega}) = \Omega$. Введя единичный вектор $\mathbf{n}$ главной нормали так, что $d\mathbf{t}/dl = \mathbf{n}/R$, можно, следовательно, написать:

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{R}[\mathbf{t}\mathbf{n}] + \mathbf{t}\Omega. \tag{18.4}$$

Первый член справа представляет собой вектор с двумя компонентами Ω_ξ, Ω_η. Единичный вектор $[\mathbf{t}\mathbf{n}]$ называется, как известно, единичным вектором бинормали. Таким образом, компоненты Ω_ξ, Ω_η образуют вектор, направленный по бинормали к стержню и по абсолютной величине равный его кривизне $1/R$.

Введя, таким образом, вектор $\boldsymbol{\Omega}$, характеризующий деформацию, и выяснив его свойства, мы можем вывести выражение для упругой свободной энергии изогнутого стержня. Упругая энергия (отнесенная к единице длины стержня) является квадратичной функцией деформации, т. е. в данном случае квадратичной функцией компонент вектора $\boldsymbol{\Omega}$. Легко видеть, что в этой квадратичной форме должны отсутствовать члены, пропорциональные $\Omega_\xi\Omega_\zeta$ или $\Omega_\eta\Omega_\zeta$. Действительно, поскольку стержень однороден вдоль всей своей длины, то все величины, в частности и энергия, не должны меняться при изменении направления положительного отсчета координаты ζ, т. е. при замене ζ на $-\zeta$; указанные же произведения при такой замене переменили бы свой знак.

Что касается члена с квадратом Ω_ζ^2, то надо помнить, что при $\Omega_\xi = \Omega_\eta = 0$ мы имеем дело с чистым кручением, и тогда выражение для энергии должно совпасть с выражением, полученным в § 16. Таким образом, соответствующий член в свободной энергии имеет вид

$$\frac{1}{2}C\Omega_\zeta^2.$$

Наконец, члены, квадратичные по Ω_ξ, Ω_η, можно написать, исходя из выражения (17.7) для энергии слабо изогнутого

небольшого участка стержня. Предположим, что стержень подвергается лишь слабому изгибу. Плоскость $\xi\zeta$ выберем в плоскости изгиба так, что компонента Ω_ξ исчезает; кручение также отсутствует при слабом изгибе. Выражение для энергии должно в этом случае совпадать с (17.7):

$$\frac{E}{2R^2}I_\eta.$$

Но мы видели, что $1/R^2$ является как раз квадратом плоского вектора $(\Omega_\xi,\ \Omega_\eta)$. Поэтому энергия должна иметь вид

$$\frac{E}{2}I_\eta\Omega_\eta^2.$$

При произвольном выборе осей ξ, η это выражение напишется, как известно из механики, в виде

$$\frac{E}{2}(I_{\eta\eta}\Omega_\eta^2 + 2I_{\eta\xi}\Omega_\eta\Omega_\xi + I_{\xi\xi}\Omega_\xi^2),$$

где $I_{\eta\eta}$, $I_{\eta\xi}$, $I_{\xi\xi}$ — компоненты тензора инерции сечения стержня. Удобно выбрать оси ξ, η так, чтобы они совпали с главными осями инерции сечения стержня. Тогда мы будем иметь просто

$$\frac{E}{2}\left(I_1\Omega_\xi^2 + I_2\Omega_\eta^2\right),$$

где I_1, I_2 — главные моменты инерции сечения. Поскольку коэффициенты при Ω_ξ^2 и Ω_η^2 постоянные, то полученное выражение должно иметь место и при сильном изгибе.

Наконец, интегрируя по всей длине стержня, получим окончательно следующее выражение для свободной упругой энергии изогнутого стержня:

$$F_{\text{ст}} = \int\left\{\frac{I_1E}{2}\Omega_\xi^2 + \frac{I_2E}{2}\Omega_\eta^2 + \frac{C}{2}\Omega_\zeta^2\right\}dl. \tag{18.5}$$

Далее, выразим через $\mathbf{\Omega}$ момент сил, действующих на сечение стержня. Это легко сделать, используя опять результаты, полученные ранее для чистого кручения и слабого чистого изгиба. При чистом кручении момент сил относительно оси стержня равен $C\tau$. Поэтому заключаем, что в общем случае момент M_ζ относительно оси ζ должен быть равен $M_\zeta = C\Omega_\zeta$. Далее, при слабом изгибе в плоскости $\xi\zeta$ момент относительно оси η есть EI_2/R. Но при таком изгибе вектор $\mathbf{\Omega}$ направлен по оси η, так что $1/R$ есть просто его абсолютная величина и $EI_2/R = EI_2\Omega$. Поэтому заключаем, что в общем случае должно быть $M_\xi = EI_1\Omega_\xi$, $M_\eta = EI_2\Omega_\eta$ (оси ξ, η выбраны по главным осям инерции сечения). Таким образом, компоненты вектора $\mathbf{M}$ момента сил равны

$$M_\xi = EI_1\Omega_\xi, \quad M_\eta = EI_2\Omega_\eta, \quad M_\zeta = C\Omega_\zeta. \tag{18.6}$$

Упругая энергия (18.5), выраженная через момент сил, имеет вид

$$F_{\text{ст}} = \int \left\{ \frac{M_\xi^2}{2I_1E} + \frac{M_\eta^2}{2I_2E} + \frac{M_\zeta^2}{2C} \right\} dl. \tag{18.7}$$

Важным случаем изгиба стержней является слабый изгиб, при котором на всем протяжении стержня отклонение его от первоначального положения мало по сравнению с длиной стержня. В этом случае кручение можно считать отсутствующим, так что можно положить $\Omega_\zeta = 0$ и из (18.4) имеем просто

$$\mathbf{\Omega} = \frac{1}{R}[\mathbf{tn}] \equiv \left[\mathbf{t}\frac{d\mathbf{t}}{dl}\right]. \tag{18.8}$$

Введем неподвижную в пространстве систему координат x, y, z с осью z вдоль оси недеформированного стержня (вместо связанных в каждой точке со стержнем координат ξ, η, ζ. Обозначим через X, Y координаты x, y точек упругой линии стержня; X и Y определяют смещение точек линии от их первоначального положения до изгиба.

Ввиду того что изгиб слаб, вектор касательной $\mathbf{t}$ почти параллелен оси z, так что приближенно можно считать его направленным вдоль этой оси. Далее, единичный вектор касательной равен производной

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{dl}$$

от радиус-вектора $\mathbf{r}$ точек кривой по ее длине. Поэтому имеем

$$\frac{d\mathbf{t}}{dl} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2} \approx \frac{d^2\mathbf{r}}{dz^2}$$

(производную по длине стержня можно приближенно заменить производной по z). В частности, x- и y-компоненты этого вектора равны соответственно d^2X/dz^2 и d^2Y/dz^2. Компоненты Ω_ξ, Ω_η с той же точностью равны теперь компонентам Ω_x, Ω_y, и из (18.8) получаем

$$\Omega_\xi = -\frac{d^2Y}{dz^2}, \quad \Omega_\eta = \frac{d^2X}{dz^2}. \tag{18.9}$$

Подставляя эти выражения в (18.5), получаем упругую энергию слабо изогнутого стержня в виде

$$F_{\text{ст}} = \frac{E}{2} \int \left\{ I_1 \left(\frac{d^2Y}{dz^2}\right)^2 + I_2 \left(\frac{d^2X}{dz^2}\right)^2 \right\} dz. \tag{18.10}$$

Напомним, что I_1, I_2 — моменты инерции соответственно относительно осей x, y, являющихся главными осями инерции.

В частности, для стержня кругового сечения $I_1 = I_2 \equiv I$ и в подынтегральном выражении получается просто сумма квадратов вторых производных, совпадающая в рассматриваемом

приближении с квадратом кривизны стержня:

$$\left(\frac{d^2X}{dz^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2Y}{dz^2}\right)^2 \approx \frac{1}{R^2}.$$

Ввиду этого формулу (18.10) можно естественным образом обобщить для слабого изгиба стержней (кругового сечения), имеющих в своем естественном (недеформированном) состоянии любую непрямолинейную форму. Для этого надо написать энергию изгиба в виде

$$F_{\text{ст}} = \frac{EI}{2}\int\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}\right)^2 dz, \tag{18.11}$$

где R_0 — радиус естественной кривизны стержня в каждой его точке. Это выражение, как и должно быть, обладает минимумом в недеформированном состоянии ($R = R_0$), а при $R_0 \to \infty$ переходит в формулу (18.10).

§ 19. Уравнения равновесия стержней

Мы можем теперь перейти к выводу уравнений равновесия изогнутых стержней. Рассмотрим опять какой-нибудь из бесконечно малых элементов стержня, вырезанный двумя бесконечно близкими сечениями, и вычислим полную действующую на него силу. Обозначим силу внутренних напряжений, приложенную к площади сечения стержня, через $\mathbf{F}$ [1]). Компоненты этого вектора равны интегралам от $\sigma_{i\zeta}$ по площади сечения:

$$F_i = \int \sigma_{i\zeta}\, df. \tag{19.1}$$

Если рассматривать два бесконечно близких сечения как поверхности оснований вырезаемого ими элемента стержня, то на верхнее основание действует сила $\mathbf{F} + d\mathbf{F}$, а на нижнее — сила $-\mathbf{F}$; их сумма есть дифференциал $d\mathbf{F}$. Пусть далее $\mathbf{K}$ есть действующая на стержень внешняя сила, отнесенная к единице его длины. Тогда на элемент длины dl действует внешняя сила $\mathbf{K}\,dl$. Равнодействующая всех сил, действующих на этот элемент, есть, следовательно, $d\mathbf{F}+\mathbf{K}\,dl$. В равновесии эта сила должна обращаться в нуль. Таким образом, получаем

$$\frac{d\mathbf{F}}{dl} = -\mathbf{K}. \tag{19.2}$$

Второе уравнение получается из условия равенства нулю полного момента сил, приложенных к данному элементу. Пусть $\mathbf{M}$

[1]) Обозначение этой силы через $\mathbf{F}$ не может привести к смешению со свободной энергией, которой мы не пользуемся ниже, в § 19–21.

есть момент сил внутренних напряжений, действующих на площадь сечения стержня. Этот момент берется относительно точки (начала координат), лежащей в самой плоскости этого сечения; его компоненты определяются формулами (18.6). Будем вычислять суммарный момент, приложенный к данному элементу стержня, относительно точки (назовем ее точкой O), лежащей в плоскости его верхнего основания. Тогда внутренние напряжения на этом основании дают момент $\mathbf{M} + d\mathbf{M}$. Момент же (относительно O) сил внутренних напряжений в нижнем основании элемента складывается из момента $-\mathbf{M}$ этих сил относительно начала координат в плоскости нижнего основания (точка O') и момента (относительно O) суммарной силы $-\mathbf{F}$, действующей на этом основании. Этот второй момент равен $[(-d\mathbf{l})(-\mathbf{F})]$, где $d\mathbf{l}$ — вектор элемента длины стержня от O' к O. Момент же, обусловленный внешними силами $\mathbf{K}$, является малой величиной высшего порядка. Таким образом, полный действующий на элемент стержня момент сил есть $d\mathbf{M} + [d\mathbf{l}\mathbf{F}]$. В равновесии он должен быть равным нулю:

$$d\mathbf{M} + [d\mathbf{l}\mathbf{F}] = 0.$$

Разделив это равенство на dl и замечая, что $d\mathbf{l}/dl = \mathbf{t}$ есть единичный вектор касательной к стержню (рассматриваемому как линия), получаем уравнение

$$\frac{d\mathbf{M}}{dl} = [\mathbf{F}\mathbf{t}]. \tag{19.3}$$

Уравнения (19.2) и (19.3) представляют собой полную систему уравнений равновесия произвольным образом изогнутого стержня.

Если действующие на стержень внешние силы являются, как говорят, сосредоточенными, т. е. приложены только к отдельным изолированным его точкам, то на участках стержня между точками приложения сил уравнения равновесия заметно упрощаются. Из (19.2) имеем при $\mathbf{K} = 0$

$$\mathbf{F} = \text{const}, \tag{19.4}$$

т. е. силы внутренних напряжений постоянны вдоль длины каждого из указанных участков стержня. Значения этих постоянных определяются тем, что разность $\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1$ значений силы в точках *1* и *2* равна

$$\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1 = -\sum \mathbf{K}, \tag{19.5}$$

где сумма берется по всем силам, приложенным к отрезку стержня между точками *1* и *2*. Обращаем внимание на то, что в разности $\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1$ точка *2* является более удаленной от начала отсчета

длины стержня (т. е. длины дуги l), чем точка *1*; это замечание существенно при определении знаков в равенстве (19.5). В частности, если на стержень действует всего одна сосредоточенная сила $\mathbf{f}$, приложенная к его свободному концу, то $\mathbf{F}$ постоянно вдоль всей длины стержня и равно $\mathbf{f}$.

Второе уравнение равновесия (19.3) тоже упрощается. Написав в нем $\mathbf{t} = d\mathbf{l}/dl = d\mathbf{r}/dl$ (где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор от некоторой заданной точки к произвольной точке стержня) и интегрируя, получаем ввиду постоянства $\mathbf{F}$

$$\mathbf{M} = [\mathbf{F}\mathbf{r}] + \text{const}. \qquad (19.6)$$

Если же отсутствуют также и сосредоточенные силы, а изгиб стержня происходит под действием приложенных к нему сосредоточенных моментов (т. е. сосредоточенных пар сил), то $\mathbf{F} = \text{const}$ вдоль всей длины стержня, а $\mathbf{M}$ испытывает в точках приложения сосредоточенных пар скачки, равные их моментам.

Обратимся, далее, к вопросу о граничных условиях на концах изгибаемого стержня. Здесь могут представиться различные случаи.

Конец стержня называют заделанным (рис. 4 *а*, см. с. 66), если он не может испытывать никаких смещений — ни продольных, ни поперечных, и, сверх того, не может измениться его направление (т. е. направление касательной к стержню в его конце). В этом случае граничные условия заключаются в том, что задаются координаты конца стержня и единичный вектор касательной $\mathbf{t}$ к нему. Сила же и момент сил реакции, действующие на стержень со стороны опоры в точке закрепления, определяются в результате решения уравнений.

Противоположным является случай свободного конца стержня. В этом случае координаты конца и его направление произвольны. Граничные условия заключаются в том, что сила $\mathbf{F}$ и момент сил $\mathbf{M}$ на конце стержня должны обратиться в нуль[1]).

Если конец стержня закреплен на шарнире, то он не может испытывать никаких смещений, но его направление не задано. Момент сил, действующих на такой свободно поворачивающийся конец, должен исчезать.

Наконец, если стержень оперт в некоторой точке опоры (рис. 4 *б*), то он может скользить по этой точке, но не может испытывать в ней поперечных смещений. В этом случае незаданными являются направление $\mathbf{t}$ и положение точки, в которой опирается стержень, по его длине. Момент сил в точке опоры должен быть равным нулю соответственно тому, что стержень может свободно поворачиваться, а сила $\mathbf{F}$ в этой точке должна

[1]) Если к свободному концу приложена сосредоточенная сила $\mathbf{f}$, то граничным условием будет не $\mathbf{F} = 0$, а $\mathbf{F} = \mathbf{f}$.

быть перпендикулярна к стержню; продольная компонента силы вызвала бы дальнейшее его скольжение в точке опоры.

Аналогичным образом легко установить граничные условия и при других способах закрепления стержня. Мы не будем останавливаться здесь на этом, ограничившись приведенными типичными примерами.

Уже в начале предыдущего параграфа было отмечено, что сильный изгиб стержня произвольного сечения сопровождается, вообще говоря, одновременным его кручением, даже если к стержню не прилагается никаких внешних крутящих моментов. Исключением является изгиб стержня в его главных плоскостях. При таком изгибе кручение не возникает. У стержня кругового сечения никакой изгиб не сопровождается кручением (если, конечно, нет внешних крутящих моментов). В этом можно убедиться следующим образом. Кручение определяется компонентой $\Omega_\zeta = (\mathbf{\Omega t})$ вектора $\mathbf{\Omega}$. Вычислим его производную по длине стержня. Для этого пишем, замечая, что $\Omega_\zeta = M_\zeta / C$:

$$\frac{d}{dl}(\mathbf{Mt}) = C\frac{d\Omega_\zeta}{dl} = \frac{d\mathbf{M}}{dl}\mathbf{t} + \mathbf{M}\frac{d\mathbf{t}}{dl}.$$

При подстановке (19.3) первый член обращается в нуль, так что

$$C\frac{d\Omega_\zeta}{dl} = \mathbf{M}\frac{d\mathbf{t}}{dl}.$$

У стержня кругового сечения $I_1 = I_2 \equiv I$; согласно (18.3) и (18.6) можно поэтому написать $\mathbf{M}$ в виде

$$\mathbf{M} = EI\left[\mathbf{t}\frac{d\mathbf{t}}{dl}\right] + \mathbf{t}C\Omega_\zeta. \tag{19.7}$$

При умножении на $d\mathbf{t}/dl$ оба члена дают нуль, так что $d\Omega_\zeta/dl = 0$, откуда

$$\Omega_\zeta = \text{const}, \tag{19.8}$$

т. е. угол кручения постоянен вдоль стержня. Если к концам стержня не приложено крутящих моментов, то $\mathbf{\Omega}_\zeta$ на концах равно нулю, а потому кручение отсутствует и по всей длине стержня.

Для стержня кругового сечения можно, таким образом, написать при чистом изгибе

$$\mathbf{M} = EI\left[\mathbf{t}\frac{d\mathbf{t}}{dl}\right] = EI\left[\frac{d\mathbf{r}}{dl}\frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2}\right]. \tag{19.9}$$

Подстановка этого выражения в (19.3) приводит к уравнению чистого изгиба стержней кругового сечения в виде

$$EI\left[\frac{d\mathbf{r}}{dl}\frac{d^3\mathbf{r}}{dl^3}\right] = \left[\mathbf{F}\frac{d\mathbf{r}}{dl}\right]. \tag{19.10}$$

Задачи

1. Привести к квадратурам задачу об определении формы стержня кругового сечения (упругого прута), сильно изогнутого в одной плоскости приложенными к нему сосредоточенными силами.

Решение. Рассматриваем участок стержня между точками приложения сил; на таком участке $\mathbf{F} = \text{const}$. Выберем плоскость изгиба в качестве плоскости xy, а ось y — параллельно силе $\mathbf{F}$. Вводим угол θ между касательной к линии стержня и осью y. Тогда $dx/dl = \sin\theta$, $dy/dl = \cos\theta$, где x, y — координаты точек стержня. Раскрывая векторные произведения в (19.10), получаем уравнение для θ как функции длины дуги l

$$IE\frac{d^2\theta}{dl^2} - F\sin\theta = 0.$$

Первое интегрирование дает

$$\frac{IE}{2}\left(\frac{d\theta}{dl}\right)^2 + F\cos\theta = c_1$$

и отсюда

$$l = \pm\sqrt{\frac{IE}{2}}\int\frac{d\theta}{\sqrt{c_1 - F\cos\theta}} + c_2. \qquad (1)$$

Функция $\theta(l)$ может быть выражена отсюда через эллиптические функции. Для координат $x = \int\sin\theta\,dl$, $y = \int\cos\theta\,dl$ получаем

$$x = \pm\frac{1}{F}\sqrt{2IE}\sqrt{c_1 - F\cos\theta} + \text{const},$$
$$y = \pm\sqrt{\frac{IE}{2}}\int\frac{\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{c_1 - F\cos\theta}} + \text{const}'. \qquad (2)$$

Момент $\mathbf{M}$ (19.9) направлен по оси z и равен

$$M = IE\frac{d\theta}{dl}.$$

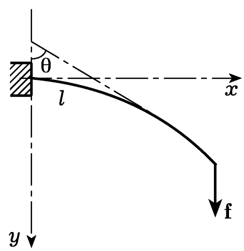


Рис. 15

2. Определить форму сильно изогнутого стержня, один конец которого заделан, а к другому, свободному, приложена сила $\mathbf{f}$; направление $\mathbf{f}$ перпендикулярно к прямой недеформированного стержня (рис. 15).

Решение. На всей длине стержня $\mathbf{F} = \text{const} = \mathbf{f}$. На заделанном конце ($l = 0$) $\theta = \pi/2$, а на свободном ($l = L$, где L — длина стержня) $M = 0$, т. е. $\theta' = 0$. Вводя обозначение $\theta_0 = \theta(L)$, имеем в (1) $c_1 = f\cos\theta_0$:

$$l = \sqrt{\frac{IE}{2f}}\int\limits_{\theta}^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}}.$$

Отсюда получаем уравнение, определяющее θ_0:

$$L = \sqrt{\frac{IE}{2f}}\int\limits_{\theta_0}^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}}.$$

Форма стержня определяется формулами

$$x = \sqrt{\frac{2IE}{f}}(\sqrt{\cos\theta_0} - \sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}), \quad y = \sqrt{\frac{IE}{2f}}\int\limits_{\theta}^{\pi/2}\frac{\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}}.$$

3. То же, если сила **f**, приложенная к свободному концу, направлена параллельно линии недеформированного стержня.

Решение. Имеем $\mathbf{F} = -\mathbf{f}$ (оси координат выбраны указанным на рис. 16 образом). Граничные условия: $\theta = 0$ при $l = 0$, $\theta' = 0$ при $l = L$. Имеем

$$l = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int\limits_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}},$$

где θ_0 определяется из $l(\theta_0) = L$. Для x и y получаем

$$x = \sqrt{\frac{2IE}{f}}(\sqrt{1-\cos\theta_0} - \sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}), \qquad y = \sqrt{\frac{IE}{2f}} \int\limits_0^\theta \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}.$$

При слабом изгибе $\theta_0 \ll 1$ и можно написать:

$$L \approx \sqrt{\frac{IE}{f}} \int\limits_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{IE}{f}},$$

т. е. θ_0 выпадает из этого соотношения. Это показывает, в согласии с результатом задачи 3 § 21, что рассматриваемое решение существует только при $f \geqslant \pi^2 IE/(4L^2)$, т. е. после потери устойчивости прямолинейной формой.

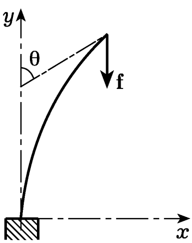


Рис. 16

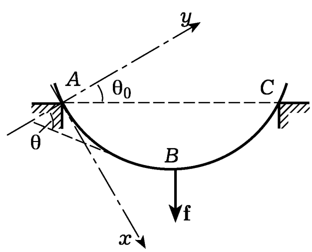


Рис. 17

4. То же, если оба конца стержня оперты, а к его середине приложена сила **f**; расстояние между точками опоры есть L_0.

Решение. Выбираем оси координат указанным на рис. 17 образом. Сила **F** постоянна на каждом из участков AB и BC, причем на каждом из них перпендикулярна к линии стержня в точках опоры — соответственно A и C. Разность значений **F** на AB и BC равна **f**, откуда заключаем, что на AB $F\sin\theta_0 = -f/2$, где θ_0 — угол между осью y и линией AC. В точке A $(l = 0)$ имеем условия $\theta = \pi/2$ и $M = 0$, т. е. $\theta' = 0$, так что на AB

$$l = \left(\frac{IE}{f}\sin\theta_0\right)^{1/2} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}},$$

$$x = 2\left(\frac{IE}{f}\sin\theta_0\cos\theta\right)^{1/2}, \quad y = \left(\frac{IE}{f}\sin\theta_0\right)^{1/2} \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\cos\theta}\, d\theta.$$

Угол θ_0 определяется из условия, что проекция длины AB на прямую AC должна быть равна $L_0/2$, откуда имеем

$$\frac{L_0}{2} = \left(\frac{IE}{f}\sin\theta_0\right)^{1/2} \int\limits_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{\cos(\theta-\theta_0)}{\sqrt{\sin\theta}}\, d\theta.$$

При некотором определенном значении θ_0, лежащем между 0 и $\pi/2$, производная $df/d\theta_0$ (где f рассматривается как функция от θ_0) обращается в нуль и делается положительной. Дальнейшему уменьшению θ_0, т. е. увеличению прогиба, соответствовало бы уменьшение f. Это значит, что найденное решение делается неустойчивым; стержень «проваливается» между опорами.

5. Привести к квадратурам задачу о пространственном сильном изгибе стержня под действием сосредоточенных сил.

Решение. Рассматриваем участок стержня между точками приложения сил, на котором $\mathbf{F} = \mathrm{const}$. Интегрируя (19.10), получаем

$$EI\left[\frac{d\mathbf{r}}{dl}\frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2}\right] = [\mathbf{F}\mathbf{r}] + c\mathbf{F}; \tag{1}$$

постоянная интегрирования написана в виде вектора $c\mathbf{F}$, направленного вдоль $\mathbf{F}$, поскольку надлежащим выбором начала координат, т. е. прибавлением к $\mathbf{r}$ некоторого постоянного вектора, можно исключить аддитивный вектор, перпендикулярный к $\mathbf{F}$. Умножая (1) скалярно и векторно на $\mathbf{r}'$ (штрих означает дифференцирование по l) и замечая, что $\mathbf{r}'\mathbf{r}'' = 0$ (поскольку $\mathbf{r}'^2 = 1$), получаем

$$\mathbf{F}[\mathbf{r}\mathbf{r}'] + c\mathbf{F}\mathbf{r}' = 0, \quad EI\mathbf{r}'' = [[\mathbf{F}\mathbf{r}]\,\mathbf{r}'] + c[\mathbf{F}\mathbf{r}'].$$

В компонентах (ось z выбрана по направлению $\mathbf{F}$)

$$(xy' - yx') + cz' = 0, \quad EIz'' = -F(xx' + yy').$$

Вводя в этих уравнениях цилиндрические координаты r, φ, z, получаем

$$r^2\varphi' + cz' = 0, \quad EIz'' = -Frr'. \tag{2}$$

Из второго уравнения имеем

$$z' = \frac{F}{2EI}(A - r^2), \tag{3}$$

где A — постоянная. Комбинируя (2) и (3) с тождеством

$$r'^2 + r^2\varphi'^2 + z'^2 = 1,$$

получаем

$$dl = \frac{r\,dr}{G(r)}, \quad G(r) = \left[r^2 - \frac{F^2}{4E^2I^2}(r^2 + c^2)(A - r^2)^2\right]^{1/2},$$

после чего из (2) и (3) находим

$$z = \frac{F}{2EI}\int\frac{(A - r^2)r}{G(r)}\,dr, \quad \varphi = -\frac{cF}{2EI}\int\frac{A - r^2}{rG(r)}\,dr,$$

чем и определяется форма изогнутого стержня.

6. Стержень кругового сечения подвергнут кручению (угол кручения τ) и изогнут в винтовую линию. Определить силу и момент сил, которые должны быть приложены к концам стержня для того, чтобы удерживать его в таком состоянии.

Решение. Пусть R — радиус цилиндра, на поверхности которого навита винтовая линия (ось z выбираем по оси этого цилиндра), а α — угол между касательной к линии и плоскостью, перпендикулярной к оси z; шаг винтовой линии h связан с α и R посредством $h = 2\pi R \operatorname{tg}\alpha$. Уравнения винтовой линии:

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi, \quad z = \varphi R \operatorname{tg}\alpha$$

(φ — угол поворота вокруг оси z); элемент длины дуги $dl = R\,d\varphi/\cos\alpha$. Подставляя эти выражения в (19.7), вычисляем компоненты вектора $\mathbf{M}$, а затем по формуле (19.3) — силу $\mathbf{F}$ (постоянную вдоль всей длины стержня). В результате находим, что сила $\mathbf{F}$ направлена по оси z и равна

$$F_z = F = C\tau\frac{\sin\alpha}{R} - \frac{EI}{R^2}\cos^2\alpha\sin\alpha.$$

Момент $\mathbf{M}$ имеет составляющую по оси z:

$$M_z = C\tau\sin\alpha + \frac{EI}{R}\cos^3\alpha$$

и составляющую M_φ, направленную в каждой точке стержня по касательной к окружности поперечного сечения цилиндра, равную $M_\varphi = FR$.

7. Определить форму гибкой нити (сопротивлением которой на изгиб можно пренебречь по сравнению с сопротивлением на растяжение), подвешенной за две точки в поле тяжести.

Решение. Выбираем плоскость, в которой расположена нить, в качестве плоскости xy с осью y, направленной вертикально вниз. В уравнении (19.3) можно пренебречь членом $d\mathbf{M}/dl$, поскольку $\mathbf{M}$ пропорционально EI. Тогда $[\mathbf{Ft}] = 0$, т. е. $\mathbf{F}$ направлено в каждой точке нити по $\mathbf{t}$ и можно написать $\mathbf{F} = F\mathbf{t}$. Уравнение (19.2) дает теперь

$$\frac{d}{dl}\left(F\frac{dx}{dl}\right) = 0, \quad \frac{d}{dl}\left(F\frac{dy}{dl}\right) = q$$

(q — вес единицы длины нити), откуда

$$F\frac{dx}{dl} = c, \quad F\frac{dy}{dl} = ql.$$

Отсюда имеем $F = \sqrt{c^2 + q^2l^2}$, так что

$$\frac{dx}{dl} = \frac{A}{\sqrt{A^2 + l^2}}, \quad \frac{dy}{dl} = \frac{l}{\sqrt{A^2 + l^2}}$$

(где $A = c/q$). Интегрирование дает

$$x = A\operatorname{Arsh}\frac{l}{A}, \quad y = \sqrt{A^2 + l^2},$$

откуда

$$y = A\operatorname{ch}\frac{x}{A},$$

т. е. нить имеет форму цепной линии. Выбор начала координат и постоянная A определяются тем, что кривая должна пройти через две заданные точки и должна иметь заданную длину.

§ 20. Слабый изгиб стержней

Уравнения равновесия значительно упрощаются в практически важном случае слабого изгиба стержней. Изгиб является слабым, если направление касательной $\mathbf{t}$ к стержню медленно меняется вдоль его длины, т. е. производная $d\mathbf{t}/dl$ мала. Другими словами, радиус кривизны изогнутого стержня в каждой точке должен быть велик по сравнению с длиной стержня. Практически это условие сводится к требованию малости поперечного прогиба стержня по сравнению с его длиной. Подчеркнем, что при этом отнюдь не требуется малости прогиба по сравнению с толщиной стержня, как это должно было быть в приближенной теории слабого изгиба пластинок, развитой в § 11, 12 [1]).

Продифференцируем (19.3) по длине:

$$\frac{d^2\mathbf{M}}{dl^2} = \left[\frac{d\mathbf{F}}{dl}\mathbf{t}\right] + \left[\mathbf{F}\frac{d\mathbf{t}}{dl}\right]. \tag{20.1}$$

Второй член содержит малую величину $\dfrac{d\mathbf{t}}{dl}$, вследствие чего им обычно (за исключением некоторых особых случаев, о которых речь идет ниже) можно пренебречь. Подставляя в первом члене $d\mathbf{F}/dl = -\mathbf{K}$, получаем уравнение равновесия в виде

$$\frac{d^2\mathbf{M}}{dl^2} = [\mathbf{tK}]. \tag{20.2}$$

Напишем это уравнение в компонентах, для чего подставим в него, согласно (18.6) и (18.9),

$$M_x = -EI_1Y'', \quad M_y = EI_2X'', \quad M_z = 0 \tag{20.3}$$

(знак $'$ означает везде дифференцирование по z). Единичный вектор $\mathbf{t}$ можно считать направленным по оси z. Тогда мы получим

$$EI_2X'''' - K_x = 0, \quad EI_1Y'''' - K_y = 0. \tag{20.4}$$

Эти уравнения определяют зависимость прогибов X и Y от z, т. е. форму слабо изогнутого стержня.

Силу $\mathbf{F}$ внутренних напряжений, действующую на поперечное сечение стержня, также можно выразить через производные от X и Y. Подставляя (20.3) в (19.3), получаем

$$F_x = -EI_2X''', \quad F_y = -EI_1Y'''. \tag{20.5}$$

---

[1]) Мы не излагаем вовсе сложной теории изгиба стержней, которые в своем естественном, недеформированном, состоянии имеют изогнутую форму (ограничиваясь лишь одним простым примером в задачах 8, 9 этого параграфа).

Мы видим, что вторые производные определяют момент сил внутренних напряжений, а третьи производные определяют сами эти силы. Силу (20.5) называют *перерезывающей силой*. Если изгиб производится сосредоточенными силами, то перерезывающая сила постоянна вдоль каждого из отрезков стержня между точками приложения сил, а в каждой из этих точек испытывает скачок, равный приложенной внешней силе.

Величины EI_2 и EI_1 называют жесткостью стержня на изгиб соответственно в главных плоскостях xz и yz [1]).

Если приложенные к стержню внешние силы действуют в одной плоскости, то и изгиб стержня произойдет в одной плоскости. Эти две плоскости, однако, в общем случае не совпадают друг с другом; легко найти угол между ними. Если α — угол между плоскостью действия сил и первой главной плоскостью изгиба (плоскостью xz), то уравнения равновесия принимают вид

$$X'''' = \frac{\cos\alpha}{I_2 E}K, \quad Y'''' = \frac{\sin\alpha}{I_1 E}K.$$

Оба уравнения отличаются только коэффициентом при K. Поэтому X и Y пропорциональны друг другу, причем

$$Y = X\,\frac{I_2}{I_1}\operatorname{tg}\alpha.$$

Угол θ между плоскостью изгиба и плоскостью xz определяется равенством

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{I_2}{I_1}\operatorname{tg}\alpha. \tag{20.6}$$

[1]) Уравнением вида

$$DX'''' - K_x = 0 \tag{20.4a}$$

описывается также в определенных предельных случаях и изгиб тонкой пластинки. Пусть прямоугольная пластинка (с длинами сторон a и b и толщиной h) укреплена вдоль своих сторон a (направление y) и изгибается вдоль сторон b (ось z) однородной вдоль оси y нагрузкой. В общем случае произвольных a и b для определения изгиба должно быть использовано двумерное уравнение (12.5) с соответствующими граничными условиями на укрепленных и на свободных сторонах пластинки. В предельном случае $a \gg b$ деформацию можно считать однородной вдоль оси y, и тогда двумерное уравнение равновесия переходит в уравнение вида (20.4а), причем роль жесткости на изгиб играет величина

$$D = \frac{Eh^3 a}{12}\,(1-\sigma^2).$$

Уравнение (20.4а) применимо и в обратном предельном случае $a \ll b$, когда пластинку можно рассматривать как стержень длины b с узким прямоугольным сечением (сечение в виде прямоугольника со сторонами a и h); при этом, однако, жесткость на изгиб определяется другим выражением

$$D = EI_2 = \frac{Eh^3 a}{12}.$$

Для стержня кругового сечения $I_1 = I_2$ и $\alpha = \theta$, т. е. изгиб происходит в плоскости действия сил. То же самое имеет место и для стержня произвольного сечения при $\alpha = 0$, т. е. когда силы направлены в главной плоскости. Для абсолютной величины прогиба

$$\zeta = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

имеет место уравнение

$$EI\zeta'''' = K, \qquad I = \frac{I_1 I_2}{\sqrt{I_1^2 \cos^2\alpha + I_2^2 \sin^2\alpha}}. \tag{20.7}$$

Перерезывающая сила $\mathbf{F}$ лежит в той же плоскости, что и $\mathbf{K}$, и равна

$$F = -EI\zeta'''. \tag{20.8}$$

Величина I играет роль эффективного значения момента инерции сечения стержня.

Напишем в явном виде граничные условия для уравнений равновесия слабо изогнутого стержня. Если конец стержня заделан, то на нем должно быть $X = Y = 0$ и, сверх того, не может измениться его направление, т. е. должно быть $X' = Y' = 0$. Таким образом, на заделанном конце стержня должны выполняться условия

$$X = Y = 0, \quad X' = Y' = 0. \tag{20.9}$$

Сила же и момент сил реакции в точках опоры определяются по известному решению формулами (20.3) и (20.5).

При достаточно слабом изгибе стержня закрепление его конца в шарнире и опирание его в точке эквивалентны в отношении граничных условий. Дело в том, что во втором случае продольное смещение стержня в точке опоры является при слабом изгибе величиной второго порядка малости по сравнению с поперечным прогибом и потому должно считаться равным нулю. Граничные условия исчезновения поперечного смещения и момента сил дают в этих случаях

$$X = Y = 0, \quad X'' = Y'' = 0. \tag{20.10}$$

Направление же конца стержня и сила реакции в точке опоры определяются в результате решения уравнений.

Наконец, на свободном конце должны отсутствовать сила $\mathbf{F}$ и момент сил $\mathbf{M}$. Согласно (20.3) и (20.5) это приводит к условиям

$$X'' = Y'' = 0, \quad X''' = Y''' = 0 \tag{20.11}$$

(если к свободному концу приложена сосредоточенная сила, то $\mathbf{F}$ должно быть равно этой силе, а не нулю).

Нетрудно обобщить уравнения (20.4) на случай стержней переменного сечения. У таких стержней моменты инерции I_1 и I_2

являются функциями z. Формулы (20.3), определяющие моменты сил в каждом данном сечении стержня, по-прежнему остаются справедливыми. Подстановка их в (20.2) приводит теперь к уравнениям

$$E\frac{d^2}{dz^2}\left(I_1\frac{d^2Y}{dz^2}\right) = K_y, \quad E\frac{d^2}{dz^2}\left(I_2\frac{d^2X}{dz^2}\right) = K_x, \tag{20.12}$$

в которых I_1 и I_2 нельзя вынести из-под знака производной. Для перерезывающей силы имеем

$$F_x = -E\frac{d}{dz}\left(I_2\frac{d^2X}{dz^2}\right), \quad F_y = -E\frac{d}{dz}\left(I_1\frac{d^2Y}{dz^2}\right). \tag{20.13}$$

Вернемся снова к уравнениям (20.1). Произведенное нами пренебрежение вторым членом в правой части равенства может оказаться в некоторых случаях незаконным даже при слабом изгибе. Это — те случаи, в которых вдоль длины стержня действует большая сила внутренних напряжений, т. е. F_z очень велико. Наличие такой силы вызывается обычно сильным натяжением стержня приложенными к его концам внешними растягивающими силами. Обозначим действующее вдоль стержня постоянное натяжение через $F_z = T$. Если стержень подвергается сильному сжатию, а не растяжению, то сила T отрицательна. Раскрывая векторное произведение $[\mathbf{F}\, d\mathbf{t}/dl]$, мы должны теперь сохранить члены, содержащие T, членами же с F_x и F_y можно по-прежнему пренебречь. Подставляя для компонент вектора $d\mathbf{t}/dl$ соответственно X'', Y'', 1, получим уравнения равновесия в виде

$$\begin{aligned} I_2EX'''' - TX'' - K_x &= 0, \\ I_1EY'''' - TY'' - K_y &= 0. \end{aligned} \tag{20.14}$$

К выражениям (20.5) для перерезывающей силы надо прибавить теперь члены, равные проекциям действующей вдоль вектора $\mathbf{t}$ силы T на оси x и y:

$$F_x = -EI_2X''' + TX', \quad F_y = -EI_1Y''' + TY'. \tag{20.15}$$

Эти формулы могут быть, конечно, получены и непосредственно из (19.3).

Большая сила T может в некоторых случаях появиться и в результате самого изгиба, даже если нет никаких специально приложенных растягивающих сил. Рассмотрим стержень, оба конца которого заделаны или закреплены на шарнирах в неподвижных опорах, так что не могут испытывать продольного смещения. Тогда прогиб стержня неизбежно сопровождается его удлинением, что и приводит к появлению в нем силы T. Легко оценить величину прогиба, при котором эта сила делается существенной.

Длина $L + \Delta L$ изогнутого стержня равна интегралу

$$L + \Delta L = \int_0^L \sqrt{1 + X'^2 + Y'^2}\, dz,$$

взятому по прямой, соединяющей точки опоры. При слабом изгибе можно разложить корень в ряд, и мы получаем для удлинения ΔL выражение

$$\Delta L = \frac{1}{2}\int_0^L (X'^2 + Y'^2)\, dz.$$

Возникающая при простом растяжении сила натяжения равна относительному удлинению, умноженному на модуль Юнга и на площадь S сечения стержня. Таким образом, сила T равна

$$T = \frac{ES}{2L}\int_0^L (X'^2 + Y'^2)\, dz. \tag{20.16}$$

Если δ есть порядок величины поперечного прогиба, то производные X' и Y' — порядка δ/L, так что весь интеграл, стоящий в (20.16), — порядка величины $(\delta/L)^2\, L = \delta^2/L$ и $T \sim ES\,(\delta/L)^2$. Порядок величины первых и вторых членов в (20.14) — соответственно $IE\delta/L^4$ и $T\delta/L^2 \sim ES\delta^3/L^4$. Момент инерции I имеет порядок величины $I \sim h^4$, а $S \sim h^2$, где h — толщина стержня. Подставляя это, легко получаем, что первые и вторые члены в (20.14) сравниваются по порядку величины при $\delta \sim h$.

Таким образом, при изгибе стержней, концы которых закреплены, можно пользоваться уравнениями равновесия в виде (20.4), только если прогиб мал по сравнению с толщиной стержня. Если же δ не мало по сравнению с h (но, конечно, по-прежнему $\delta \ll L$), то надо пользоваться уравнениями (20.14). При этом сила T в этих уравнениях заранее неизвестна. При их решении надо сначала рассматривать T как заданный параметр, а затем по полученному решению определить T согласно формуле (20.16), чем и определится связь T с приложенными к стержню изгибающими силами.

Обратным предельным случаем является тот, когда сопротивление стержня на изгиб мало по сравнению с его сопротивлением на растяжение, так что в уравнениях (20.14) можно пренебречь первыми членами по сравнению со вторыми. Физически такой случай может быть осуществлен либо очень сильным растяжением T, либо при достаточно малом EI, что может быть связано с малой толщиной h (о сильно натянутых стержнях говорят как о *струнах*). Уравнения равновесия гласят в этих случаях:

$$TX'' + K_x = 0, \quad TY'' + K_y = 0. \tag{20.17}$$

Концы струны надо представлять себе закрепленными в том смысле, что их координаты заданы, т. е.

$$X = Y = 0. \tag{20.18}$$

Направление же концов не может быть задано произвольным образом, а определяется решением уравнений.

В заключение покажем, каким образом уравнения равновесия слабо изогнутого стержня можно получить, исходя из вариационного принципа, используя выражение (18.10) для упругой энергии:

$$F_{\text{ст}} = \frac{E}{2} \int \{I_1 Y''^2 + I_2 X''^2\}\, dz.$$

В равновесии должна быть минимальна сумма этой энергии и потенциальной энергии, связанной с действующими на стержень внешними силами $\mathbf{K}$, т. е. должно быть

$$\delta F_{\text{ст}} - \int (K_x \delta X + K_y \delta Y)\, dz = 0$$

(второй член представляет собой работу внешних сил при бесконечно малом смещении линии стержня). При варьировании $F_{\text{ст}}$ производим дважды интегрирование по частям:

$$\frac{1}{2}\delta \int X''^2\, dz = \int X''\, \delta X''\, dz = X''\, \delta X' \Big| - \int X'''\, \delta X'\, dz = \\ = X''\, \delta X' \Big| - X'''\, \delta X \Big| + \int X''''\, \delta X\, dz$$

и аналогичным образом для интеграла от Y''^2. Собирая различные члены, получим

$$\int [(EI_1 Y'''' - K_y)\delta Y + (EI_2 X'''' - K_x)\delta X]\, dz + \\ + EI_1 (Y''\, \delta Y' - Y'''\, \delta Y)\Big| + EI_2 (X''\, \delta X' - X'''\, \delta X)\Big| = 0.$$

Из первого, интегрального, члена следуют ввиду произвольности вариаций δX и δY уравнения равновесия (20.4). Остальные же, проинтегрированные, члены дают граничные условия к этим уравнениям; так, на свободном конце вариации δX, δY, $\delta X'$, $\delta Y'$ произвольны и соответственно получаются условия (20.11). В то же время коэффициенты при δX и δY в этих членах дают выражения (20.5) для компонент перерезывающей силы, а коэффициенты при $\delta X'$ и $\delta Y'$ — выражения (20.3) для компонент изгибающего момента.

Наконец, уравнения равновесия (20.14) при наличии растягивающей силы T можно получить тем же способом, прибавив к

варьируемой энергии величину

$$T\,\Delta L = \frac{T}{2}\int (X'^2 + Y'^2)\,dz,$$

представляющую собой работу силы T на пути ΔL — удлинении стержня.

Задачи

1. Определить форму прогиба стержня (длины l) под влиянием собственного веса при различных способах закрепления его концов.

Решение. Искомая форма определяется решением уравнения

$$\zeta'''' = \frac{q}{EI}$$

(q — вес единицы длины стержня) с теми или другими граничными условиями на его концах, сформулированными в тексте. При различных способах закрепления концов стержня получаются следующие формы прогиба и максимальные смещения (так называемые стрелки прогиба); начало координат везде выбрано в одном из концов стержня.

а) Оба конца стержня заделаны:

$$\zeta = \frac{q}{24EI}z^2(z-l)^2, \qquad \zeta\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{384}\frac{ql^4}{EI}.$$

б) Оба конца оперты:

$$\zeta = \frac{q}{24EI}z(z^3 - 2lz^2 + l^3), \qquad \zeta\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI}.$$

в) Один конец ($z = l$) заделан, а другой ($z = 0$) оперт:

$$\zeta = \frac{q}{48EI}z(2z^3 - 3lz^2 + l^3), \qquad \zeta(0,42l) = 0,0054\frac{ql^4}{EI}.$$

г) Один конец ($z = 0$) заделан, а другой ($z = l$) свободен:

$$\zeta = \frac{q}{24EI}z^2(z^2 - 4lz + 6l^2), \qquad \zeta(l) = \frac{1}{8}\frac{ql^4}{EI}.$$

2. Определить форму прогиба стержня под влиянием приложенной к его середине сосредоточенной силы f.

Решение. Везде, кроме точки $z = l/2$, имеем уравнение $\zeta'''' = 0$. Граничные условия в концах стержня ($z = 0$ и $z = l$) определяются способом закрепления; в точке же $z = l/2$ должны быть непрерывны ζ, ζ', ζ'', а разность перерезывающих сил $F = -EI\zeta'''$ по обе стороны этой точки должна быть равна силе f.

Форма стержня (на участке $0 \leqslant z \leqslant l/2$) и стрелка прогиба даются следующими формулами.

а) Оба конца стержня заделаны:

$$\zeta = \frac{f}{48EI}z^2(3l - 4z), \qquad \zeta\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{fl^3}{192EI}.$$

б) Оба конца стержня оперты:

$$\zeta = \frac{f}{48EI}z(3l^2 - 4z^2), \qquad \zeta\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{fl^3}{48EI}.$$

Форма стержня симметрична относительно его середины, так что функция $\zeta(z)$ на участке $l/2 \leqslant z \leqslant l$ получается отсюда просто заменой z на $l - z$.

3. То же для стержня, один из концов которого ($z = 0$) заделан, а другой ($z = l$) свободен, причем к последнему приложена сосредоточенная сила f.

Решение. Вдоль всего стержня $F = \text{const} = f$, так что $\zeta''' = -f/EI$. С условиями $\zeta = 0$, $\zeta' = 0$ при $z = 0$ и $\zeta'' = 0$ при $z = l$ получаем

$$\zeta = \frac{f}{6EI} z^2 (3l - z), \qquad \zeta(l) = \frac{fl^3}{3EI}.$$

4. Определить форму прогиба стержня с закрепленными концами под влиянием сосредоточенной пары сил, приложенной к его середине.

Решение. Вдоль всей длины стержня $\zeta'''' = 0$, а в точке $z = l/2$ момент $M = EI\zeta''$ испытывает скачок, равный моменту m приложенной сосредоточенной пары. С соответствующими условиями на концах получим:

а) оба конца стержня заделаны:

$$\zeta = \frac{m}{8EIl} z^2 (l - 2z) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant z \leqslant l/2,$$
$$\zeta = -\frac{m}{8EIl} (l - z)^2 [l - 2(l - z)] \quad \text{при} \quad l/2 \leqslant z \leqslant l;$$

б) оба конца закреплены в шарнирах:

$$\zeta = \frac{m}{24EIl} z (l^2 - 4z^2) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant z \leqslant l/2,$$
$$\zeta = -\frac{m}{24EIl} (l - z)[l^2 - 4(l - z)^2] \quad \text{при} \quad l/2 \leqslant z \leqslant l.$$

По обе стороны от точки $z = l/2$ стержень изогнут в разные стороны.

5. То же, если сосредоточенная пара приложена к свободному концу стержня, другой конец которого заделан.

Решение. Вдоль всей длины стержня имеем $M = EI\zeta'' = m$, а в точке $z = 0$: $\zeta = 0$, $\zeta' = 0$. Форма изгиба дается формулой

$$\zeta = \frac{m}{2EI} z^2.$$

6. Определить форму стержня (кругового сечения) с закрепленными в шарнирах концами, растягиваемого силой T и изгибаемого силой f, приложенной к его середине.

Решение. На отрезке $0 \leqslant z \leqslant l/2$ перерезывающая сила равна $f/2$, так что (20.15) дает уравнение

$$\zeta''' - \frac{T}{EI} \zeta' = -\frac{f}{2EI}.$$

Граничные условия: $\zeta = 0$, $\zeta' = 0$ при $z = 0, l$, а при $z = l/2$ должно быть $\zeta' = 0$ (в силу непрерывности ζ'). Для формы стержня (на отрезке $0 \leqslant z \leqslant l/2$) получим формулу

$$\zeta = \frac{f}{2T} \left[z - \frac{\operatorname{sh} kz}{k \operatorname{ch}(kl/2)} \right], \qquad k = \left(\frac{T}{EI} \right)^{1/2}.$$

При малых k это выражение переходит в формулу, полученную в задаче 2*б*. При больших же значениях k оно переходит в

$$\zeta = \frac{f}{2T} z,$$

т. е., в согласии с уравнением (20.17), гибкая нить принимает под влиянием силы f форму, составленную из двух прямых отрезков, пересекающихся в точке $z = l/2$.

Если сила T сама возникает в результате растяжения стержня поперечной силой, то для ее определения надо воспользоваться формулой (20.16). Подставив в нее полученное выражение, найдем уравнение

$$\frac{1}{k^6}\left[\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\,\mathrm{th}^2\,\frac{kl}{2}-\frac{3}{kl}\,\mathrm{th}\,\frac{kl}{2}\right]=\frac{8E^2I^3}{f^2S},$$

определяющее в неявном виде T как функцию от f.

7. Стержень (кругового сечения) бесконечной длины лежит на упругом основании, т. е. при изгибе на него действует сила $K = -\alpha\zeta$, пропорциональная прогибу. Определить форму, принимаемую стержнем при действии на него сосредоточенной силы f.

Р е ш е н и е. Выбираем начало координат в точке приложения силы f. Везде, кроме точки $z = 0$, имеет место уравнение

$$EI\zeta'''' = -\alpha\zeta.$$

Решение должно удовлетворять условиям $\zeta = 0$ при $z = \pm\infty$, а при $z = 0$ должны быть непрерывны ζ', ζ''; разность же значений перерезывающей силы $F = -EI\zeta'''$ при $z \to +0$ и $z \to -0$ должна быть равна f. Такое решение есть

$$\zeta = \frac{f}{8\beta^3 EI}e^{-\beta|z|}[\cos\beta|z| + \sin\beta|z|], \qquad \beta = \left(\frac{\alpha}{4EI}\right)^{1/4}.$$

8. Вывести уравнение равновесия для слабого изгиба тонкого стержня (кругового сечения), имеющего в своем естественном состоянии форму дуги окружности и изгибаемого в своей плоскости приложенными к нему радиальными силами.

Р е ш е н и е. Выбирая начало полярных координат r, φ в центре окружности, напишем уравнение деформированной линии стержня в виде $z = a + \zeta(\varphi)$, где a — радиус дуги, а ζ — малые радиальные смещения при изгибе. Воспользовавшись известным выражением для радиуса кривизны в полярных координатах, найдем с точностью до членов первого порядка по ζ

$$\frac{1}{R} = \frac{r^2 - rr'' + 2r'^2}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} \approx \frac{1}{a} - \frac{\zeta + \zeta''}{a^2}$$

(штрих означает дифференцирование по φ). Согласно (18.11) находим упругую энергию изгиба:

$$F_{\text{ст}} = \frac{EI}{2}\int\limits_0^{\varphi_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{a}\right)^2 a\,d\varphi = \frac{EI}{2a^3}\int\limits_0^{\varphi_0}(\zeta + \zeta'')^2\,d\varphi$$

(φ_0 — центральный угол дуги). Уравнение равновесия получается из вариационного принципа,

$$\delta F_{\text{ст}} - \int\limits_0^{\varphi_0}\delta\zeta K_r a\,d\varphi = 0$$

(K_r — отнесенная к единице длины внешняя радиальная сила) с дополнительным условием

$$\int\limits_0^{\varphi_0}\zeta\,d\varphi = 0,$$

выражающим собой в рассматриваемом приближении условие неизменности общей длины периметра стержня, т. е. условие отсутствия общего его

растяжения. Следуя методу Лагранжа, приравниваем нулю сумму

$$\delta F_{\text{СТ}} - \int_0^{\varphi_0} aK_r \delta\zeta \, d\varphi + a\alpha \int_0^{\varphi_0} \delta\zeta \, d\varphi = 0,$$

где α — постоянная. Производя варьирование в подынтегральном выражении в $F_{\text{СТ}}$ и интегрируя член с $\delta\zeta''$ дважды по частям, получим

$$\int \left[\frac{EI}{a^3}(\zeta + 2\zeta'' + \zeta'''') - aK_r + \alpha a \right] \delta\zeta \, d\varphi + \\ + \frac{EI}{a^3}(\zeta + \zeta'') \, \delta\zeta' \Big| - \frac{EI}{a^3}(\zeta' + \zeta''') \, \delta\zeta \Big| = 0.$$

Отсюда находим уравнение равновесия

$$\frac{EI}{a^4}(\zeta'''' + 2\zeta'' + \zeta) - K_r + \alpha = 0, \tag{1}$$

выражение для перерезывающей силы

$$F = -\frac{EI}{a^3}(\zeta' + \zeta''')$$

и выражение для изгибающего момента

$$M = \frac{EI}{a^2}(\zeta + \zeta'')$$

(ср. конец § 20). Постоянная α определяется условием отсутствия общего растяжения стержня.

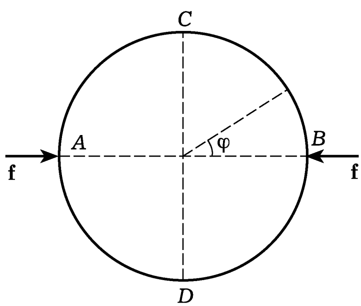


Рис. 18

9. Определить деформацию кругового кольца, изгибаемого двумя сосредоточенными силами f, действующими вдоль диаметра (рис. 18).

Решение. Интегрируя уравнение (1) по всей длине кольца, найдем, что

$$2\pi\alpha a = \int K_r a \, d\varphi = 2f.$$

Везде, кроме точек $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$, имеем уравнение (1) с $K_r = 0$:

$$\zeta'''' + 2\zeta'' + \zeta + \frac{fa^3}{\pi EI} = 0.$$

Искомая деформация кольца симметрична относительно диаметров AB и CD, в силу чего в точках A, B, C, D должно быть $\zeta' = 0$. Разность значений перерезывающей силы ори $\varphi \to \pm 0$ должна быть равна f. Удовлетворяющее этим условиям решение уравнения равновесия есть

$$\zeta = \frac{fa^3}{EI} \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{4}\varphi \cos\varphi - \frac{\pi}{8}\cos\varphi - \frac{1}{4}\sin\varphi \right), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

В частности, точки A и B взаимно сближаются на величину

$$|\zeta(0) + \zeta(\pi)| = \frac{fa^3}{EI} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right).$$

§ 21. Устойчивость упругих систем

Поведение стержня, подверженного воздействию продольных сжимающих сил, представляет простейший пример важного явления *упругой неустойчивости*, впервые обнаруженного *Л. Эйлером.*

При отсутствии поперечных изгибающих внешних сил K_x, K_y уравнения равновесия сжатого стержня (20.14) имеют очевидное решение $X = Y = 0$, соответствующее стержню, остающемуся при воздействии продольной силы T прямолинейным. Это решение, однако, соответствует устойчивому равновесию стержня лишь до тех пор, пока сжимающая сила $|T|$ остается меньше некоторого критического значения $T_{\text{кр}}$. При $|T| < T_{\text{кр}}$ прямолинейная форма стержня устойчива по отношению к произвольному малому возмущению. Другими словами, если под влиянием какого-либо малого воздействия стержень подвергается слабому изгибу, то по прекращении этого воздействия стержень будет стремиться вернуться в исходное состояние.

Напротив, при $|T| > T_{\text{кр}}$ прямолинейная форма отвечает неустойчивому равновесию. Достаточно уже бесконечно малого воздействия (изгиба) для того, чтобы равновесие нарушилось, в результате чего произойдет сильный изгиб стержня. Ясно, что в этих условиях сжатый стержень вообще не сможет реально существовать в неизогнутом виде.

Поведение стержня после потери им устойчивости должно описываться уравнениями сильного изгиба. Однако самое значение критической нагрузки $T_{\text{кр}}$ может быть получено с помощью уравнений слабого изгиба. При $|T| = T_{\text{кр}}$ прямолинейная форма стержня соответствует некоторому безразличному равновесию. Это значит, что наряду с решением $X = Y = 0$ должны существовать еще и состояния слабого изгиба, которые тоже являются равновесными. Поэтому критическое значение $T_{\text{кр}}$ можно определить как то значение $|T|$, при котором у уравнений

$$EI_2X'''' + |T|X'' = 0, \quad EI_1Y'''' + |T|Y'' = 0 \tag{21.1}$$

появляется отличное от нуля решение. Само же это решение определяет характер деформации, которой подвергнется стержень непосредственно после потери им устойчивости.

В задачах этого параграфа приведен ряд типичных случаев потери устойчивости различными упругими системами.

Задачи

1. Определить критическую сжимающую силу для стержня с шарнирно закрепленными концами.

Решение. Поскольку нас интересует наименьшее значение $|T|$, при котором появляется отличное от нуля решение уравнений (21.1), то достаточно рассмотреть лишь то из этих двух уравнений, которое содержит мень-

шее из I_1, I_2; пусть $I_2 < I_1$. Ищем решение уравнения

$$EI_2X'''' + |T|X'' = 0$$

в виде

$$X = A + Bz + C\sin kz + D\cos kz, \quad k = (|T|/EI_2)^{1/2}.$$

Отличное от нуля решение, удовлетворяющее условиям $X = 0$, $X'' = 0$ при $z = 0$ и $z = l$, есть

$$X = C\sin kz,$$

причем должно быть $\sin kl = 0$. Отсюда находим искомую критическую силу

$$T_{\text{кр}} = \pi^2 EI_2/l^2.$$

После потери устойчивости стержень примет форму, изображенную на рис. 19 *а*.

2. То же для стержня с заделанными концами (рис. 19 *б*).

Решение. $T_{\text{кр}} = 4\pi^2 EI_2/l^2$.

3. То же для стержня, один из концов которого заделан, а другой свободен (рис. 19 *в*).

Решение. $T_{\text{кр}} = \pi^2 EI_2/4l^2$.

4. Определить критическую сжимающую силу для стержня (кругового сечения) с шарнирно закрепленными концами, лежащего на упругом основании (см. задачу 7 § 20).

Решение. Вместо уравнений (21.1) здесь надо рассмотреть уравнение

$$EIX'''' + |T|X'' + \alpha X = 0.$$

Аналогичное исследование приводит к решению

$$X = A\sin\frac{n\pi}{l}z, \quad T_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}\left(n^2 + \frac{\alpha l^4}{n^2\pi^4 EI}\right),$$

причем для n должно быть взято то из целых значений, для которого получается наименьшее значение $T_{\text{кр}}$. При достаточно больших значениях α получается $n > 1$, т. е. после потери устойчивости стержень принимает форму с несколькими пучностями.

5. Стержень кругового сечения подвергнут кручению, и его концы заделаны. Определить критическую величину кручения, после которой прямолинейная форма стержня делается неустойчивой.

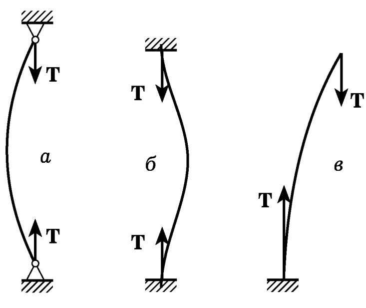


Рис. 19

Решение. Критическое значение угла кручения определяется появлением отличных от нуля решений уравнений слабого изгиба закрученного стержня. Для вывода этих уравнений подставляем выражение (19.7):

$$\mathbf{M} = EI\left[\mathbf{t}\frac{d\mathbf{t}}{dl}\right] + C\tau\mathbf{t}$$

(τ — постоянный угол кручения) в уравнение (19.3); это дает

$$EI\left[\mathbf{t}\frac{d^2\mathbf{t}}{dl^2}\right] + C\tau\frac{d\mathbf{t}}{dl} - [\mathbf{F}\mathbf{t}] = 0.$$

Дифференцируем это уравнение; поскольку изгиб слабый, то при дифференцировании первого и третьего членов можно считать $\mathbf{t}$ постоянным, равным вектору $\mathbf{t_0}$, направленному по оси стержня (оси z). Помня также, что $d\mathbf{F}/dl = 0$ (внешние силы по длине

стержня отсутствуют), получаем

$$EI\left[\mathbf{t}_0 \frac{d^3\mathbf{t}}{dl^3}\right] + C\tau \frac{d^2\mathbf{t}}{dl^2} = 0,$$

или в компонентах:

$$Y'''' - \varkappa X''' = 0, \quad X'''' + \varkappa Y''' = 0,$$

где $\varkappa = C\tau/(EI)$. Введя в качестве неизвестной функцию $\xi = X + iY$, получим уравнение

$$\xi'''' - i\varkappa\xi''' = 0.$$

Ищем решение, удовлетворяющее условиям $\xi = 0$, $\xi' = 0$ при $z = 0$, l в виде

$$\xi = a(1 + i\varkappa z - e^{i\varkappa z}) + bz^2,$$

и находим в качестве условия совместности для получающихся для a и b уравнений соотношение

$$e^{i\varkappa l} = \frac{2 + i\varkappa l}{2 - i\varkappa l}, \qquad \frac{\varkappa l}{2} = \operatorname{tg}\frac{\varkappa l}{2}.$$

Наименьший корень этого уравнения: $\varkappa l/2 = 4,49$, так что

$$\tau_{\text{кр}} = \frac{8,98EI}{Cl}.$$

6. То же для стержня с шарнирно закрепленными концами.

Решение. Здесь получается

$$\xi = a\left(1 - e^{i\varkappa z} - \frac{\varkappa^2}{2}z^2\right) + bz,$$

причем $\varkappa$ определяется из $e^{i\varkappa l} = 1$, т. е. $\varkappa l = 2\pi$. Поэтому искомый критический угол кручения

$$\tau_{\text{кр}} = \frac{2\pi EI}{Cl}.$$

7. Определить предел устойчивости вертикального стержня, находящегося под действием собственного веса; нижний конец стержня заделан.

Решение. Если продольное натяжение $F_z \equiv T$ меняется вдоль длины стержня, то в первом члене в (20.1) $\dfrac{dF_z}{dl} \neq 0$ и вместо уравнений (20.14) получается

$$I_2EX'''' - (TX')' - K_x = 0,$$

$$I_1EY'''' - (TY')' - K_y = 0.$$

В данном случае поперечные изгибающие силы отсутствуют по всей длине стержня, а $T = -q(l - z)$, где q — вес единицы длины стержня, а z отсчитывается от его нижнего конца. Предполагая, что $I_2 < I_1$, рассматриваем уравнение

$$I_2EX''' = TX' = -q(l - z)X'$$

(при $z = l$ автоматически имеем $X''' = 0$). Общий интеграл этого уравнения для функции $u = X'$ есть

$$u = \eta^{1/3}[aJ_{-1/3}(\eta) + bJ_{1/3}(\eta)],$$

где

$$\eta = \frac{2}{3}\left(\frac{q}{EI_2}(l-z)^3\right)^{1/2}.$$

Граничные условия $X' = 0$ при $z = 0$ и $X'' = 0$ при $z = l$ дают для функции $u(\eta)$ условия

$$u = 0 \quad \text{при} \quad \eta = \eta_0 \equiv \frac{2}{3}\left(\frac{ql^3}{EI_2}\right)^{1/2}, \qquad u'\eta^{1/3} = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0.$$

Для того чтобы удовлетворить этим условиям, надо положить $b = 0$, причем $J_{-1/3}(\eta_0) = 0$. Наименьший корень этого уравнения $\eta_0 = 1,87$, откуда находим критическую длину стержня

$$l_{\text{кр}} = 1,98\left(\frac{EI_2}{q}\right)^{1/3}.$$

8. Стержень обладает вытянутой формой поперечного сечения, так что $I_2 \gg I_1$. Один конец стержня заделан, а к свободному концу приложена сила f, изгибающая его в главной плоскости xz (в которой жесткость на изгиб есть EI_2). Определить критическое значение $f_{\text{кр}}$, после которого плоская форма изгиба становится неустойчивой и стержень отгибается в боковую сторону (в плоскости yz), одновременно испытывая кручение.

Решение. Ввиду большой величины жесткости EI_2 по сравнению с EI_1 (и с жесткостью на кручение C) [1]) неустойчивость по отношению к сильному боковому изгибу возникает в то время, когда изгиб в плоскости xz остается еще слабым. Для определения момента наступления неустойчивости надо составить уравнения слабого бокового изгиба стержня, сохраняя в них члены, пропорциональные произведениям действующей в плоскости xz силы f на малые смещения. Поскольку сосредоточенная сила приложена лишь к свободному концу стержня, то вдоль всей его длины $\mathbf{F} = \mathbf{f}$, а на свободном конце ($z = l$) момент $\mathbf{M} = 0$; по формуле (19.6) находим компоненты момента относительно закрепленной системы координат x, y, z;

$$M_x = 0, \qquad M_y = (l-z)f, \qquad M_z = (Y - Y_0)f,$$

где $Y_0 = Y(l)$. Проецируем эти моменты на связанные в каждой точке со стержнем оси координат ξ, η, ζ; с точностью до членов первого порядка по смещениям получим

$$M_\xi = \varphi(l-z)f, \quad M_\eta = (l-z)f,$$

$$M_\zeta = (l-z)f\frac{dY}{dz} + f(Y - Y_0),$$

где φ — полный угол поворота сечения стержня при его закручивании (угол кручения $\tau = d\varphi/dz$ здесь не постоянен вдоль длины стержня). С другой стороны, согласно (18.6) и (18.9) имеем при слабом изгибе

$$M_\xi = -EI_1 Y'', \qquad M_\eta = EI_2 X'', \qquad M_\zeta = C\varphi'$$

---

[1]) Так, для узкого прямоугольного сечения с шириной h и высотой $b \gg h$ имеем

$$EI_1 = \frac{bh^3}{12}E, \qquad EI_2 = \frac{b^3h}{12}E, \qquad C = \frac{bh^3}{3}\mu.$$

и, сравнивая эти выражения, получим уравнения равновесия

$$EI_2X'' = (l-z)f,$$

$$EI_1Y'' = -\varphi(l-z)f, \quad C\varphi' = (l-z)fY' + (Y-Y_0)f.$$

Первое из этих уравнений определяет основной изгиб стержня в плоскости xz; требуется найти значение f, при котором появляется отличное от нуля решение у второго и третьего уравнений. Исключая из них Y, найдем

$$\varphi'' + k^2(l-z)^2\varphi = 0, \quad k^2 = \frac{f^2}{EI_1C}.$$

Общий интеграл этого уравнения есть

$$\varphi = a\sqrt{l-z}J_{1/4}\left(\frac{k}{2}(l-z)^2\right) + b\sqrt{l-z}J_{-1/4}\left(\frac{k}{2}(l-z)^2\right).$$

На заделанном конце ($z=0$) должно быть $\varphi = 0$, а на свободном крутящий момент $C\varphi' = 0$. Из второго условия имеем $a = 0$, а первое дает $J_{-1/4}(kl^2/2) = 0$. Наименьший корень этого уравнения: $kl^2/2 = 2,006$, откуда

$$f_{\text{кр}} = \frac{4,01}{l^2}(EI_1C)^{1/2}.$$

ГЛАВА III

УПРУГИЕ ВОЛНЫ

§ 22. Упругие волны в изотропной среде

Если в деформируемом теле происходит движение, то температура тела, вообще говоря, отнюдь не постоянна, а меняется как со временем, так и от точки к точке вдоль тела. Это обстоятельство сильно усложняет точные уравнения движения в общем случае произвольных движений.

Обычно, однако, положение упрощается благодаря тому, что передача тепла из одного участка тела в другой (посредством простой теплопроводности) происходит очень медленно. Если теплообмен практически не происходит в течение промежутков времени порядка периода колебательных движений в теле, то можно рассматривать каждый участок тела как теплоизолированный, т. е. движение будет адиабатическим. Но при адиабатических деформациях σ_{ik} выражается через u_{ik} по формулам обычного вида с той лишь разницей, что вместо обычных (изотермических) значений величин E, σ надо брать их адиабатические значения (см. § 6). Ниже мы будем считать это условие выполненным, и соответственно этому под E и σ в этой главе будут подразумеваться их адиабатические значения.

Для того чтобы получить уравнения движения упругой среды, надо приравнять силу внутренних напряжений $\partial\sigma_{ik}/\partial x_k$ произведению ускорения $\ddot{u}_i$ на массу единицы объема тела, т. е. на его плотность ρ:

$$\rho\ddot{u}_i = \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}\ ^{1)}. \qquad (22.1)$$

---

[1]) Подразумевается, что скорость $\mathbf{v}$ точек среды совпадает с производной $\dot{\mathbf{u}}$ от ее смещения. Подчеркнем, однако, что отождествление этих двух величин отнюдь не является чем-то само собой разумеющимся. В кристаллах вектор $\mathbf{u}$ представляет собой смещение узлов решетки; скорость же $\mathbf{v}$ определяется в механике сплошных сред как импульс единицы массы вещества. Равенство $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$ справедливо, строго говоря, лишь для идеальных кристаллов, где в каждом узле решетки (и только в них) находится по атому. Если же кристалл содержит дефекты (незаполненные узлы — вакансии, или же, напротив, лишние атомы в междоузлиях), то перенос массы относительно решетки (т. е. отличный от нуля импульс) может существовать и в недеформированной решетке — за счет диффузии дефектов «сквозь решетку». Отождествление $\mathbf{v}$ и $\dot{\mathbf{u}}$ подразумевает пренебрежение этими эффектами — в связи с медленностью диффузии или малой концентрацией дефектов.

Это — общий вид уравнений движения. В частности, уравнения движения изотропной упругой среды можно написать непосредственно по аналогии с уравнением равновесия (7.2). Имеем

$$\rho\ddot{\mathbf{u}} = \frac{E}{2(1+\sigma)}\Delta\mathbf{u} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}. \tag{22.2}$$

Поскольку все деформации предполагаются малыми, то рассматриваемые в теории упругости движения представляют собой малые *упругие колебания* или *волны*. Начнем с рассмотрения плоской упругой волны в неограниченной изотропной среде, т. е. волны, в которой деформация $\mathbf{u}$ является функцией только от одной из координат, скажем, от x (и от времени). Все производные по y и z уравнениях (22.2) исчезают, и мы получаем для отдельных компонент вектора $\mathbf{u}$ следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c_l^2}\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c_t^2}\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = 0 \tag{22.3}$$

(уравнение для u_z такое же, как для u_y), где введены обозначения [1]):

$$c_l = \left[\frac{E(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}\right]^{1/2}, \qquad c_t = \left[\frac{E}{2\rho(1+\sigma)}\right]^{1/2}. \tag{22.4}$$

Уравнения (22.3) представляют собой обычные волновые уравнения в одном измерении, и входящие в них величины c_l и c_t являются скоростями распространения волны. Мы видим, что скорость распространения волны оказывается различной для компоненты u_x, с одной стороны, и компонент u_y, u_z — с другой.

Таким образом, упругая волна представляет собой по существу две независимо распространяющиеся волны. В одной из них (u_x) смещение направлено вдоль распространения самой волны; такую волну называют *продольной*, она распространяется со скоростью c_l. В другой (u_y, u_z) — смещение направлено в плоскости, перпендикулярной направлению распространения; такую волну называют *поперечной*, она распространяется со скоростью c_t. Как видно из (22.4), скорость c_l всегда больше скорости c_t [2]):

$$c_l > (4/3)^{1/2} c_t. \tag{22.5}$$

---

[1]) Дадим также выражения скоростей c_l и c_t через коэффициенты сжатия и сдвига и через коэффициенты Ламэ:

$$c_l = \left(\frac{3K+4\mu}{3\rho}\right)^{1/2} = \left(\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\right)^{1/2}, \qquad c_t = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{1/2}.$$

[2]) При фактическом изменении σ в пределах от 0 до 1/2 (см. примеч. на с. 26) имеет место и более сильное неравенство $c_l > c_t\sqrt{2}$.

Скорости c_l и c_t называют *продольной* и *поперечной скоростями звука*.

Мы знаем, что изменение объема при деформации определяется суммой диагональных членов тензора деформации, т. е. величиной $u_{ii} \equiv \operatorname{div} \mathbf{u}$. В поперечной волне имеются только компоненты u_y, u_z, и поскольку они не зависят ни от y, ни от z, для такой волны $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$. Таким образом, поперечные волны не связаны с изменением объема отдельных участков тела. Напротив, для продольных волн $\operatorname{div} \mathbf{u} \neq 0$; эти волны сопровождаются сжатиями и расширениями в теле.

Разделение волны на две независимо распространяющиеся с разными скоростями части можно произвести и в общем случае произвольной (не плоской) упругой волны в неограниченном пространстве.

Перепишем уравнение (22.2), введя в него скорости c_l и c_t:

$$\ddot{\mathbf{u}} = c_t^2 \Delta \mathbf{u} + (c_l^2 - c_t^2) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}. \tag{22.6}$$

Представим вектор $\mathbf{u}$ в виде суммы двух частей:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t, \tag{22.7}$$

из которых одна удовлетворяет условию

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_t = 0, \tag{22.8}$$

а другая — условию

$$\operatorname{rot} \mathbf{u}_l = 0. \tag{22.9}$$

Из векторного анализа известно, что такое представление всегда возможно (это есть представление вектора в виде суммы ротора некоторого вектора и градиента некоторого скаляра).

При подстановке $\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t$ в (22.6) получаем

$$\ddot{\mathbf{u}}_l + \ddot{\mathbf{u}}_t = c_t^2 \Delta (\mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t) + (c_l^2 - c_t^2) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}_l. \tag{22.10}$$

Применим к обеим частям этого уравнения операцию div. Поскольку $\operatorname{div} \mathbf{u}_t = 0$, мы получим

$$\operatorname{div} \ddot{\mathbf{u}}_l = c_t^2 \Delta \operatorname{div} \mathbf{u}_l + (c_l^2 - c_t^2) \Delta \operatorname{div} \mathbf{u}_l,$$

или

$$\operatorname{div}(\ddot{\mathbf{u}}_l - c_l^2 \Delta \mathbf{u}_l) = 0.$$

С другой стороны, rot стоящего в скобках выражения тоже равен нулю в силу (22.9). Но если rot и div некоторого вектора исчезают во всем пространстве, то этот вектор тождественно равен нулю. Таким образом,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_l}{\partial t^2} - c_l^2 \Delta \mathbf{u}_l = 0. \tag{22.11}$$

Аналогично применяя к уравнению (22.10) операцию rot и помня, что $\operatorname{rot}\mathbf{u}_l = 0$ и что rot всякого градиента равен нулю, находим

$$\operatorname{rot}(\ddot{\mathbf{u}}_t - c_t^2 \Delta \mathbf{u}_t) = 0.$$

Поскольку div стоящего в скобках выражения тоже равна нулю, мы приходим опять к уравнению того же вида, как и (22.11):

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_t}{\partial t^2} - c_t^2 \Delta \mathbf{u}_t = 0. \tag{22.12}$$

Уравнения (22.11) и (22.12) представляют собой обычные волновые уравнения (в трех измерениях). Каждое из них соответствует распространению упругой волны со скоростью соответственно c_l или c_t. Одна из этих волн ($\mathbf{u}_t$) не связана с изменением объема (в силу $\operatorname{div}\mathbf{u}_t = 0$), а другая ($\mathbf{u}_l$) сопровождается объемными сжатиями и расширениями.

В монохроматической упругой волне вектор смещения имеет вид

$$\mathbf{u} = \operatorname{Re}\{\mathbf{u_0}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\}, \tag{22.13}$$

где $\mathbf{u_0}$ — функция координат. Эта функция удовлетворяет уравнению

$$c_t^2 \Delta \mathbf{u_0} + (c_l^2 - c_t^2) \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u_0} + \omega^2 \mathbf{u_0} = 0, \tag{22.14}$$

получающемуся при подстановке (22.13) в (22.6). Продольная и поперечная части монохроматической волны удовлетворяют уравнениям

$$\Delta \mathbf{u}_l + k_l^2 \mathbf{u}_l = 0, \qquad \Delta \mathbf{u}_t + k_t^2 \mathbf{u}_t = 0, \tag{22.15}$$

где $k_l = \omega/c_l$, $k_t = \omega/c_t$ — волновые векторы продольной и поперечной волн.

Наконец, рассмотрим отражение и преломление плоской монохроматической упругой волны на границе раздела между двумя различными упругими средами. При этом надо иметь в виду, что при отражении и преломлении характер волны, вообще говоря, меняется. Если на границу раздела падает чисто поперечная или чисто продольная волна, то в результате получаются смешанные волны, содержащие как поперечные, так и продольные части. Характер волны не меняется (как это явствует из соображений симметрии) только в случае перпендикулярного падения волны на поверхность раздела и в случае падения под произвольным углом поперечной волны с параллельными плоскости раздела колебаниями.

Соотношения, определяющие направления отраженной и преломленной волн, могут быть получены непосредственно из постоянства частоты и касательных к поверхности раздела ком-

понент волнового вектора[1]). Пусть θ и θ' — угол падения и угол отражения (или преломления), а c, c' — скорости обеих рассматриваемых волн. Тогда

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta'} = \frac{c}{c'}. \tag{22.16}$$

Пусть, например, падающая волна поперечна. Тогда $c = c_{t1}$ есть скорость поперечных волн в первой среде. Для поперечной же отраженной волны имеем тоже $c' = c_{t1}$, и потому (22.16) даст

$$\theta = \theta',$$

т. е. угол падения равен углу отражения. Для продольной же отраженной волны имеем $c' = c_{l1}$ и потому

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta'} = \frac{c_{t1}}{c_{l1}}.$$

Для поперечной части преломленной волны имеем $c' = c_{t2}$ и при поперечной же падающей волне имеем

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta'} = \frac{c_{t1}}{c_{t2}}.$$

Аналогично для продольной преломленной волны имеем

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta'} = \frac{c_{t1}}{c_{l2}}.$$

Задачи

1. Определить коэффициент отражения продольной монохроматической волны, падающей под произвольным углом на границу тела с вакуумом.

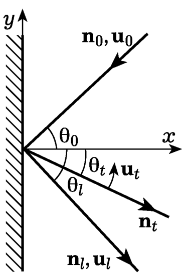


Рис. 20

Решение. При отражении под произвольным углом возникают как продольная, так и поперечная отраженные волны. Из соображений симметрии заранее ясно, что вектор смещения в поперечной отраженной волне будет лежать целиком в плоскости падения (рис. 20; $\mathbf{n}_0$, $\mathbf{n}_l$, $\mathbf{n}_t$ — единичные векторы вдоль направлений падающей, продольной и поперечной отраженных волн, а $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{u}_l$, $\mathbf{u}_t$ — соответствующие векторы смещений). Полное смещение в теле равно сумме (общий множитель $e^{-i\omega t}$ для краткости опускаем)

$$\mathbf{u} = A_0\mathbf{n}_0 e^{i\mathbf{k}_0\mathbf{r}} + A_l\mathbf{n}_l e^{i\mathbf{k}_l\mathbf{r}} + A_t\,[\mathbf{a}\mathbf{n}_t]\,e^{i\mathbf{k}_t\mathbf{r}}$$

($\mathbf{a}$ — единичный вектор, перпендикулярный к плоскости падения). Абсолютные величины волновых векторов равны: $k_0 = k_l = \omega/c_l$, $k_t = \omega/c_t$, а углы падения θ_0 и отражения θ_l, θ_t связаны соотношениями $\theta_l = \theta_0$, $\sin\theta_t = \sin\theta_0\dfrac{c_t}{c_l}$. Для компонент тензора деформа-

[1]) См. VI, § 66. Все изложенные там соображения, полностью применимы и здесь.

ции на границе тела получаем

$$u_{xx} = ik_0(A_0 + A_l)\cos^2\theta_0 + iA_t k_t \cos\theta_t \sin\theta_t,$$

$$u_{ll} = ik_0(A_0 + A_l),$$

$$u_{xy} = ik_0(A_0 - A_l)\sin\theta_0\cos\theta_0 + \frac{i}{2}A_t k_t(\cos^2\theta_t - \sin^2\theta_t)$$

(общие экспоненциальные множители опускаем). Компоненты тензора напряжений вычисляем по общей формуле (5.11), которую удобно писать здесь в виде

$$\sigma_{ik} = 2\rho c_t^2 u_{ik} + \rho(c_l^2 - 2c_t^2)u_{ll}\delta_{ik}.$$

Граничные условия на свободной поверхности среды: $\sigma_{ik}n_k = 0$, откуда $\sigma_{xx} = \sigma_{yx} = 0$, и дают два уравнения, из которых можно выразить A_l, A_t через A_0. В результате вычислений получается

$$A_l = A_0\frac{c_t^2\sin 2\theta_t\sin 2\theta_0 - c_l^2\cos^2 2\theta_t}{c_t^2\sin 2\theta_t\sin 2\theta_0 + c_l^2\cos^2 2\theta_t},$$

$$A_t = -A_0\frac{2c_l c_t\sin 2\theta_0\cos 2\theta_t}{c_t^2\sin 2\theta_t\sin 2\theta_0 + c_l^2\cos^2 2\theta_t}.$$

При $\theta_0 = 0$ имеем $A_l = -A_0$, $A_t = 0$, т. е. волна отражается целиком как продольная. Отношение перпендикулярной к поверхности среды компоненты плотности потока энергии в отраженной продольной волне к такому же потоку в падающей волне есть

$$R_l = \left|\frac{A_l}{A_0}\right|^2.$$

Аналогичное отношение для отраженной поперечной волны есть

$$R_t = \frac{c_t\cos\theta_t}{c_l\cos\theta_0}\left|\frac{A_t}{A_0}\right|^2.$$

Разумеется, $R_l + R_t = 1$.

2. То же, если падающая волна поперечная (и направление колебаний в ней лежит в плоскости падения) [1]).

Решение. Волна отражается в виде поперечной же и продольной волн, причем $\theta_t = \theta_0$, $c_t\sin\theta_l = c_l\sin\theta_0$. Полный вектор смещения:

$$\mathbf{u} = [\mathbf{a}\mathbf{n}_0]\,A_0 e^{i\mathbf{k}_0\mathbf{r}} + \mathbf{n}_l A_l e^{i\mathbf{k}_l\mathbf{r}} + [\mathbf{a}\mathbf{n}_t]\,A_t e^{i\mathbf{k}_l\mathbf{r}}.$$

Для амплитуд отраженных волн получаются выражения

$$\frac{A_t}{A_0} = \frac{c_t^2\sin 2\theta_l\sin 2\theta_0 - c_l^2\cos^2 2\theta_0}{c_t^2\sin 2\theta_l\sin 2\theta_0 + c_l^2\cos^2 2\theta_0},$$

$$\frac{A_l}{A_0} = \frac{2c_l c_t\sin 2\theta_0\cos 2\theta_0}{c_t^2\sin 2\theta_l\sin 2\theta_0 + c_l^2\cos^2 2\theta_0}.$$

---

[1]) Если колебания перпендикулярны плоскости падения, то волна отражается целиком в виде такой же волны, так что $R_t = 1$.

3. Определить частоты радиальных собственных колебаний упругого шара радиуса R.

Решение. Выбираем сферические координаты с началом в центре шара. При радиальных колебаниях $\mathbf{u}$ направлено по радиусу и зависит только от r (и от t). Поэтому $\operatorname{rot}\mathbf{u} = 0$. Введем «потенциал» смещения φ согласно $u_r = u = \partial\varphi/\partial r$. Выраженное через φ уравнение движения сводится к волновому уравнению $c_l^2 \Delta\varphi = \ddot{\varphi}$, или для периодических по времени ($\sim e^{-i\omega t}$) колебаний:

$$\Delta\varphi \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = -k^2\varphi, \qquad k = \frac{\omega}{c_l}. \tag{1}$$

Решение, конечное во всем объеме шара, включая его центр, есть

$$\varphi = A\frac{\sin kr}{r}$$

(временной множитель не пишем). Радиальные напряжения:

$$\sigma_{rr} = \rho\{(c_l^2 - 2c_t^2)u_{ii} + 2c_t^2 u_{rr}\} = \rho\{(c_l^2 - 2c_t^2)\Delta\varphi + 2c_t^2\varphi''\}$$

или, использовав уравнение (1):

$$\frac{1}{\rho}\sigma_{rr} = -\omega^2\varphi - 4c_t^2\frac{1}{r}\varphi'. \tag{2}$$

Граничное условие $\sigma_{rr}(R) = 0$ приводит к уравнению

$$\frac{\operatorname{tg} kR}{kR} = \frac{1}{1 - (kRc_l/2c_t)^2}. \tag{3}$$

Его корни определяют частоты собственных колебаний $\omega = c_l k$.

4. Определить частоту радиальных колебаний сферической полости в неограниченной упругой среде, для которой $c_l \gg c_t$.

Решение. В неограниченной среде радиальные колебания полости сопровождаются излучением продольных звуковых волн, что приводит к потере энергии и тем самым к затуханию колебаний. При $c_l \gg c_t$ (т. е. $K \gg \mu$) это излучение будет слабым и можно говорить о собственных частотах колебаний с малым коэффициентом затухания.

Ищем решение уравнения (1) в виде расходящейся сферической волны

$$\varphi = A\frac{e^{ikr}}{r}, \qquad k = \frac{\omega}{c_l}$$

и с помощью (2) получаем из граничного условия $\sigma_{rr}(R) = 0$

$$\left(kR\frac{c_l}{c_t}\right)^2 = 4(1 - ikR).$$

Отсюда (при $c_l \gg c_t$)

$$\omega = \frac{2c_t}{R}\left(1 - i\frac{c_t}{c_l}\right).$$

Вещественная часть ω дает собственную частоту колебаний, а мнимая — коэффициент затухания; в несжимаемой среде ($c_l \to \infty$) затухание, естественно, отсутствовало бы. Эти колебания — специфический результат сопротивляемости среды по отношению к сдвигу ($\mu \neq 0$). Обратим внимание на то, что для них $kR = 2c_t/c_l \ll 1$, т. е. соответствующая этим колебаниям длина волны велика по сравнению с R (интересно сравнить это с колебаниями упругой сферы, для которых при $c_l \gg c_t$ первая собственная частота определяется согласно (3) из $kR = \pi$).

§ 23. Упругие волны в кристаллах

Распространение упругих волн в анизотропной среде, т. е. в кристаллах, подчиняется более сложным закономерностям, чем распространение волн в изотропном теле. Для исследования таких волн надо обратиться к общим уравнениям движения

$$\rho\ddot{u}_i = \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}$$

и воспользоваться для σ_{ik} общим выражением (10.3)

$$\sigma_{ik} = \lambda_{iklm}u_{lm}.$$

Соответственно сказанному в начале предыдущего параграфа под λ_{iklm} надо везде подразумевать адиабатические значения модулей упругости.

Подставляя σ_{ik} в уравнения движения, получаем

$$\rho\ddot{u}_i = \lambda_{iklm}\frac{\partial u_{lm}}{\partial x_k} = \frac{\lambda_{iklm}}{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_l}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\lambda_{iklm}\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k\,\partial x_m} + \frac{1}{2}\lambda_{iklm}\frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k\,\partial x_l}.$$

Поскольку тензор λ_{iklm} симметричен по индексам l и m, то, меняя во втором члене обозначение индексов суммирования l и m на обратное, находим, что первый и второй члены тождественны. Таким образом, получаем уравнения движения в виде

$$\rho\ddot{u}_i = \lambda_{iklm}\frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k\,\partial x_l}. \tag{23.1}$$

Рассмотрим монохроматическую упругую волну в кристалле. Для этого мы должны искать решение уравнений движения в виде

$$u_i = u_{0i}e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}$$

(u_{0i} — постоянные), причем соотношение между волновым вектором $\mathbf{k}$ и частотой ω должно быть определено так, чтобы написанная функция действительно удовлетворяла уравнению (23.1). Дифференцирование u_i по времени приводит к умножению на $-i\omega$, а дифференцирование по x_k — к умножению на ik_k. Поэтому уравнение (23.1) после подстановки превращается в

$$\rho\omega^2 u_i = \lambda_{iklm}k_k k_l u_m.$$

Написав $u_i = \delta_{im}u_m$, переписываем это равенство в виде

$$(\rho\omega^2\delta_{im} - \lambda_{iklm}k_k k_l)u_m = 0. \tag{23.2}$$

Это — система трех однородных уравнений первой степени относительно неизвестных u_x, u_y, u_z. Как известно, такая система

имеет отличные от нуля решения лишь при условии равенства нулю определителя коэффициентов уравнений

$$|\lambda_{iklm}k_k k_l - \rho\omega^2\delta_{lm}| = 0. \tag{23.3}$$

Этим уравнением определяется зависимость частоты волны от волнового вектора; об этой зависимости говорят как о *законе дисперсии* волн, а определяющее его уравнение называют *дисперсионным.* Уравнение (23.3) — уравнение третьей степени по ω^2. Оно имеет три различных корня $\omega^2 = \omega_j^2(\mathbf{k})$ — три, как говорят, ветви закона дисперсии. Подставляя поочередно каждый из этих корней обратно в уравнения (23.2) и решая их, мы найдем направления вектора смещения $\mathbf{u}$ в этих волнах, — как говорят, направления их *поляризации* (в силу своей однородности, уравнения (23.2) не определяют, конечно, абсолютной величины вектора $\mathbf{u}$, остающейся произвольной)[1]). Направления поляризации трех волн с одним и тем же волновым вектором $\mathbf{k}$ взаимно перпендикулярны. Это важное утверждение следует прямо из того, что уравнение (23.3) можно рассматривать как уравнение, определяющее главные значения симметричного тензора второго ранга $\lambda_{iklm}k_k k_l$[2]); уравнения же (23.2) определяют главные направления этого тензора, которые, как известно, взаимно перпендикулярны. Ни одно из этих направлений, однако, не является, вообще говоря, ни чисто продольным, ни чисто поперечным по отношению к направлению $\mathbf{k}$.

Скорость распространения волны (ее *групповая скорость*) дается производной

$$\mathbf{U} = \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} \tag{23.4}$$

(см. VI, § 67). В изотропной среде зависимость $\omega(\mathbf{k})$ сводится к пропорциональности абсолютному значению k, и потому направление этой скорости совпадает с направлением волнового вектора. В кристаллах это не так, и направление распространения волны не совпадает, вообще говоря, с направлением $\mathbf{k}$. Векторы $\mathbf{k}$ и $\mathbf{U}$ коллинеарны для некоторых исключительных направлений осей симметрии кристалла.

---

[1]) В изотропном теле этими ветвями являются $\omega = c_l k$ (продольно поляризованные волны) и два совпадающих корня $\omega = c_t k$, отвечающие волнам с двумя независимыми поперечными направлениями поляризации.

[2]) В силу свойств симметрии тензора λ_{iklm} имеем

$$\lambda_{iklm}k_k k_l = \lambda_{kiml}k_k k_l = \lambda_{mlki}k_k k_l.$$

Последнее выражение отличается от первого только обозначением немых индексов k, l, т. е. тензор $\lambda_{iklm}k_k k_l$ действительно симметричен по индексам i, m.

Из дисперсионного уравнения (23.3) видно, что в кристалле ω является однородной функцией первого порядка от компонент вектора $\mathbf{k}$ (если ввести в качестве неизвестной величины отношение ω/k, то коэффициенты уравнения не зависят от k). Поэтому скорость $\mathbf{U}$ — однородная функция нулевого порядка от k_x, k_y, k_z. Другими словами, скорость распространения волны, являясь функцией ее направления, не зависит от частоты.

Если построить в $\mathbf{k}$-пространстве (т. е. в координатах k_x, k_y, k_z) поверхность постоянной частоты, $\omega(\mathbf{k}) = \mathrm{const}$ (для какой-либо из ветвей закона дисперсии), то направление вектора (23.4) совпадает с нормалью к поверхности. Очевидно, что если эта поверхность всюду выпуклая, то связь между направлениями $\mathbf{U}$ и $\mathbf{k}$ взаимно однозначна: каждому направлению $\mathbf{k}$ отвечает одно определенное направление $\mathbf{U}$ и наоборот. Если же поверхность постоянной частоты не всюду выпукла, то эта связь становится не взаимно однозначной: каждому направлению $\mathbf{k}$ по-прежнему отвечает (в данной ветви закона дисперсии) одно направление $\mathbf{U}$, но заданное направление $\mathbf{U}$ может осуществляться с различными направлениями $\mathbf{k}$.

Задачи

1. Определить закон дисперсии упругих волн в кубическом кристалле, распространяющихся в кристаллографической плоскости (001) — плоскость грани куба (а) и в кристаллографическом направлении [111] — направление диагонали куба (б).

Решение. В кубическом кристалле отличны от нуля упругие модули $\lambda_{xxxx} \equiv \lambda_1$, $\lambda_{xxyy} \equiv \lambda_2$, $\lambda_{xyxy} \equiv \lambda_3$ (и равные им компоненты тензора с заменой индексов x, y другими из x, y, z — см. § 10); оси x, y, z направлены вдоль ребер куба.

а) Выберем плоскость (001) в качестве плоскости xy и пусть θ — угол между лежащим в ней волновым вектором $\mathbf{k}$ и осью x. Составив дисперсионное уравнение (23.3) и решив его, найдем три ветви закона дисперсии:

$$\rho\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}k^2\{\lambda_1 + \lambda_3 \pm [(\lambda_1 - \lambda_3)^2 - 4(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3)\sin^2\theta\cos^2\theta]^{1/2}\},$$
$$\rho\omega_3^2 = \lambda_3 k^2.$$

Волна третьей ветви поперечна и поляризована вдоль оси z. Волны первых двух ветвей поляризованы в плоскости xy. Из соображений симметрии очевидно, что скорость распространения $\mathbf{U} = \partial\omega/\partial\mathbf{k}$ всех этих волн тоже лежит в плоскости xy, поэтому для ее вычисления достаточно полученных выражений.

При $\theta = 0$ ($\mathbf{k}$ вдоль оси x) имеем

$$\rho\omega_1^2 = \lambda_1 k^2, \quad \rho\omega_2^2 = \lambda_3 k^2,$$

причем волна *1* продольна (поляризована вдоль оси x), а волна *2* поперечна (поляризована вдоль оси y).

При $\theta = \pi/4$ ($\mathbf{k}$ вдоль диагонали грани куба) имеем

$$\rho\omega_1^2 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3)k^2, \quad \rho\omega_2^2 = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)k^2.$$

Волна *1* продольна, а волна *2* поперечна и поляризована в плоскости xy.

б) В этом случае волновой вектор имеет компоненты $k_x = k_y = k_z = k/\sqrt{3}$. Решение дисперсионного уравнения дает

$$\rho\omega_1^2 = \frac{1}{3}k^2(\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3),$$

$$\rho\omega_{2,3}^2 = \frac{1}{3}k^2(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3).$$

Волна *1* продольна, волны *2* и *3* поперечны.

2. Определить закон дисперсии упругих волн в кристалле гексагональной системы.

Решение. Гексагональный кристалл имеет пять независимых упругих модулей (см. задачу 1 § 10), для которых введем обозначения:

$$\lambda_{xxxx} = \lambda_{yyyy} = a, \quad \lambda_{xyxy} = b, \quad \lambda_{xxyy} = a - 2b,$$

$$\lambda_{xxzz} = \lambda_{yyzz} = c, \quad \lambda_{xzxz} = \lambda_{yzyz} = d, \quad \lambda_{zzzz} = f.$$

Ось z направлена по оси симметрии шестого порядка, направления же осей x, y могут быть выбраны произвольно. Выберем плоскость xz так, чтобы в ней лежал волновой вектор $\mathbf{k}$. Тогда $k_x = k\sin\theta$, $k_y = 0$, $k_z = k\cos\theta$, где θ — угол между $\mathbf{k}$ и осью z. Составляя уравнение (23.3) и решая его, найдем

$$\rho\omega_1^2 = k^2(b\sin^2\theta + d\cos^2\theta),$$

$$\rho\omega_{2,3}^2 = \frac{1}{2}k^2\{a\sin^2\theta + f\cos^2\theta + d \pm \\ \pm[((a-d)\sin^2\theta + (d-f)\cos^2\theta)^2 + 4(c+d)^2\sin^2\theta\cos^2\theta]^{1/2}\}.$$

При $\theta = 0$ имеем

$$\rho\omega_{1,2}^2 = k^2 d, \quad \rho\omega_3^2 = k^2 f;$$

волна *3* продольна, волны *1* и *2* поперечны.

§ 24. Поверхностные волны

Особым видом упругих волн являются волны, распространяющиеся вблизи поверхности среды и не проникающие в глубь нее — *волны Рэлея* (*Rayleigh*, 1885).

Напишем уравнения движения в виде (22.11), (22.12):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\Delta u = 0 \tag{24.1}$$

(где u — какая-либо из компонент векторов $\mathbf{u}_l$, $\mathbf{u}_t$, а c — соответствующая ей скорость c_l или c_t), и будем искать решения, отвечающие поверхностным волнам. Поверхность упругой среды будем предполагать плоской, и выберем ее в качестве плоскости xy; области среды пусть соответствуют $z < 0$.

Рассмотрим «плоскую» монохроматическую поверхностную волну, распространяющуюся вдоль оси x; функция $u(t, x, z)$ в ней имеет вид

$$u = e^{i(kx - \omega t)}f(z),$$

где функция $f(z)$ удовлетворяет уравнению $f'' = \varkappa^2 f$; введено обозначение

$$\varkappa = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)^{1/2}. \tag{24.2}$$

Если $k^2 - \omega^2/c^2 < 0$, то $f(z)$ — периодическая функция, т. е. мы получили бы обычную плоскую волну, не исчезающую во всем объеме среды. Поэтому надо считать, что $k^2 - \omega^2/c^2 > 0$, и $\varkappa$ — вещественное число. Уравнение имеет решения вида $\exp(\pm\varkappa z)$; из них надо выбрать то, которое затухает при $z \to -\infty$.

Таким образом, мы приходим к следующему решению уравнений движения:

$$u = \text{const} \cdot e^{i(kx-\omega t)} e^{\varkappa z}. \tag{24.3}$$

Оно соответствует волне, быстро (экспоненциально) затухающей внутрь тела, т. е. распространяющейся только вблизи его поверхности. Величина $\varkappa$ определяет скорость этого затухания.

Истинный вектор деформации $\mathbf{u}$ в волне является суммой векторов $\mathbf{u}_l$ и $\mathbf{u}_t$, компоненты каждого из которых удовлетворяют уравнению (24.1) со скоростью $c = c_l$ для $\mathbf{u}_l$ и $c = c_t$ для $\mathbf{u}_t$. В случае объемных волн в неограниченной среде эти две части представляют собой две независимо распространяющиеся волны. В случае же поверхностных волн такое разделение на две независимые части оказывается (благодаря наличию граничных условий) невозможным. Вектор смещения $\mathbf{u}$ должен быть определенной линейной комбинацией векторов $\mathbf{u}_l$ и $\mathbf{u}_t$. По поводу этих последних надо также отметить, что они отнюдь не имеют теперь наглядного смысла параллельных и перпендикулярных к направлению распространения компонент смещения.

Для определения линейной комбинации векторов $\mathbf{u}_l$ и $\mathbf{u}_t$, дающей истинное смещение $\mathbf{u}$, надо обратиться к предельным условиям на границе тела. Отсюда же определится связь между волновым вектором $\mathbf{k}$ и частотой ω, а следовательно, и скорость распространения волны. На свободной поверхности должно выполняться условие $\sigma_{ik} n_k = 0$. Поскольку вектор нормали $\mathbf{n}$ направлен по оси z, то отсюда следуют условия

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0,$$

откуда

$$u_{xz} = 0, \qquad u_{yz} = 0, \qquad \sigma(u_{xx} + u_{yy}) + (1-\sigma) u_{zz} = 0. \tag{24.4}$$

Поскольку все величины не зависят от координаты y, то второе из этих условий дает

$$u_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial u_y}{\partial z} = 0.$$

С учетом (24.3) отсюда следует

$$u_y = 0. \tag{24.5}$$

Таким образом, в поверхностной волне вектор деформации $\mathbf{u}$ лежит в плоскости, проведенной через направление распространения перпендикулярно к поверхности.

«Поперечная» часть волны $\mathbf{u}_t$ должна удовлетворять условию (22.8) $\operatorname{div}\mathbf{u}_t = 0$, или

$$\frac{\partial u_{tx}}{\partial x} + \frac{\partial u_{tz}}{\partial z} = 0.$$

Ввиду (24.3) это условие приводит к равенству

$$iku_{tx} + \varkappa_t u_{tz} = 0,$$

определяющему отношение u_{tx}/u_{tz}. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} u_{tx} &= \varkappa_t a \exp\left(ikx + \varkappa_t z - i\omega t\right), \\ u_{tz} &= -ika \exp\left(ikx + \varkappa_t z - i\omega t\right), \end{aligned} \tag{24.6}$$

где a — постоянная.

«Продольная» часть $\mathbf{u}_l$ удовлетворяет условию (22.9) $\operatorname{rot}\mathbf{u}_l = 0$, или

$$\frac{\partial u_{lx}}{\partial z} - \frac{\partial u_{lz}}{\partial x} = 0,$$

откуда

$$iku_{lz} - \varkappa_l u_{lx} = 0, \qquad \varkappa_l = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_l^2}\right)^{1/2}.$$

Таким образом, должно быть

$$u_{lx} = kbe^{ikx+\varkappa_l z - i\omega t}, \qquad u_{lz} = -i\varkappa_l be^{ikx+\varkappa_l z - i\omega t}, \tag{24.7}$$

где b — постоянная.

Теперь воспользуемся первым и третьим из условий (24.4). Выражая u_{ik} через производные от u_i и вводя скорости c_l и c_t, переписываем эти условия в виде

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0, \\ &c_l^2\frac{\partial u_z}{\partial z} + (c_l^2 - 2c_t^2)\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0. \end{aligned} \tag{24.8}$$

Сюда надо подставить

$$u_x = u_{lx} + u_{tx}, \qquad u_z = u_{lz} + u_{tz}.$$

В результате первое из условий (24.8) дает уравнение

$$a(k^2 + \varkappa_t^2) + 2bk\varkappa_l = 0. \tag{24.9}$$

Второе приводит к равенству

$$2ac_t^2\varkappa_t k + b[c_l^2(\varkappa_l^2 - k^2) + 2c_t^2k^2] = 0,$$

или

$$2a\varkappa_t k + b(k^2 + \varkappa_t^2) = 0. \qquad (24.10)$$

Условие совместности двух однородных уравнений (24.9) и (24.10) дает

$$(k^2 + \varkappa_t^2)^2 = 4k^2\varkappa_t\varkappa_l,$$

или, возведя в квадрат и подставив значения $\varkappa_t$, $\varkappa_l$:

$$\left(2k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}\right)^4 = 16k^4\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2}\right)\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_l^2}\right). \qquad (24.11)$$

Этим уравнением определяется связь между ω и k. Очевидно, что $\omega = \mathrm{const}\cdot k$; для определения коэффициента пропорциональности, напишем это соотношение в виде

$$\omega = c_t k\xi. \qquad (24.12)$$

Тогда общий множитель k^8 сокращается и, раскрыв скобки, получим для ξ уравнение

$$\xi^6 - 8\xi^4 + 8\xi^2\left(3 - 2\frac{c_t^2}{c_l^2}\right) - 16\left(1 - \frac{c_t^2}{c_l^2}\right) = 0. \qquad (24.13)$$

Отсюда видно, что число ξ зависит только от отношения c_t/c_l, являющегося некоторой характерной для каждого данного вещества постоянной и зависящего в свою очередь только от коэффициента Пуассона:

$$\frac{c_t^2}{c_l^2} = \frac{1 - 2\sigma}{2(1 - \sigma)}.$$

Величина ξ должна быть, разумеется, вещественной положительной, причем $\xi < 1$ (так, чтобы $\varkappa_t$, $\varkappa_l$ были вещественны). Уравнение (24.13) имеет только один корень, удовлетворяющий этим условиям, так что для каждого данного значения c_t/c_l получается всего одно определенное значение ξ [1]).

Таким образом, для поверхностных волн, как и для объемных, частота пропорциональна волновому вектору. Коэффициент пропорциональности между ними есть скорость распространения волны

$$U = c_t\xi. \qquad (24.14)$$

---

[1]) При переходе от уравнения (24.11) к (24.13) теряется корень $\omega^2 = 0$ ($\varkappa_t = \varkappa_l = k$), которому отвечает значение $\xi = 0$, тоже удовлетворяющее условию $\xi < 1$. Из уравнений (24.9), (24.10) видно, однако, что этому корню соответствует равенство $a = -b$, и потому полное смещение $\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t = 0$, т. е. движение вообще отсутствует.

Этим определяется скорость распространения поверхностных волн через скорости c_t и c_l поперечных и продольных объемных волн. Отношение амплитуд поперечной и продольной частей волны определяется по значению ξ формулой

$$\frac{a}{b} = -\frac{2-\xi^2}{2\sqrt{1-\xi^2}}. \tag{24.15}$$

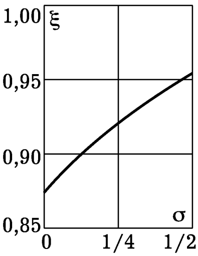


Рис. 21

Отношение c_t/c_l фактически меняется для различных веществ в пределах от $1/\sqrt{2}$ до 0, что соответствует изменению σ от 0 до 1/2; при этом ξ меняется от 0,874 до 0,955. На рис. 21 дан график зависимости ξ от σ.

Задача

Плоскопараллельный пласт толщины h (среда *1*) лежит на упругом полупространстве (среда *2*). Определить зависимость частоты от волнового вектора для поперечных волн в пласте с направлением колебаний, параллельным границам пласта.

Решение. Выберем плоскость раздела между пластом и полупространством в качестве плоскости xy, причем упругому полупространству соответствуют $z < 0$, а пласту $h \geqslant z \geqslant 0$. В пласте имеем

$$u_{x1} = u_{z1} = 0, \qquad u_{y1} = f(z)\, e^{i\,(kx-\omega t)},$$

а в среде *2* пишем затухающую в глубь нее волну:

$$u_{x2} = u_{z2} = 0, \qquad u_{y2} = Ae^{\varkappa_2 z} e^{i\,(kx-\omega t)}, \qquad \varkappa_2 = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_{t2}^2}\right)^{1/2}.$$

Для функции $f(z)$ имеем уравнение

$$f'' + \varkappa_1^2 f = 0, \qquad \varkappa_1 = \left(\frac{\omega^2}{c_{t1}^2} - k^2\right)^{1/2}$$

(мы увидим ниже, что должно быть $\varkappa_1^2 > 0$), откуда

$$f(z) = B\sin\varkappa_1 z + C\cos\varkappa_1 z.$$

На свободной границе пласта ($z = h$) должно быть $\sigma_{zy} = 0$, т. е. $\partial u_{y1}/\partial z = 0$. На границе же между обеими средами ($z = 0$) имеем условия

$$u_{y1} = u_{y2}, \qquad \mu_1 \frac{\partial u_{y1}}{\partial z} = \mu_2 \frac{\partial u_{y2}}{\partial z}$$

(μ_1, μ_2 — модули сдвига обеих сред). Из этих условий находим три уравнения для A, B, C, условие совместности которых дает

$$\operatorname{tg}\varkappa_1 h = \frac{\mu_2\varkappa_2}{\mu_1\varkappa_1}.$$

Это уравнение определяет в неявном виде зависимость ω от k; оно имеет решения лишь при вещественных $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, так что всегда $c_{t2} > \omega/k > c_{t1}$. Отсюда видно, что распространение рассматриваемых волн возможно лишь при условии $c_{t2} > c_{t1}$.

§ 25. Колебания стержней и пластинок

Волны, распространяющиеся в тонких пластинках и стержнях, существенно отличаются от волн, распространяющихся в среде, неограниченной во всех направлениях. При этом речь идет о волнах, длина которых велика по сравнению с толщиной стержня или пластинки. В обратном предельном случае длин волн, малых по сравнению с этой толщиной, стержень или пластинку можно было бы вообще рассматривать как неограниченные во всех направлениях, и мы получили бы снова соотношения, имевшие место в неограниченных средах.

Необходимо различать волны, в которых колебания происходят параллельно оси стержня или плоскости пластинки, от волн с перпендикулярными колебаниями. Начнем с изучения продольных волн в стержнях.

Продольная деформация стержня (однородная вдоль его сечения), на боковую поверхность которого не действуют никакие внешние силы, представляет собой простое растяжение или сжатие. Таким образом, продольные волны в стержне представляют собой распространяющиеся вдоль его длины простые растяжения или сжатия. Но при простом растяжении отлична от нуля только компонента σ_{zz} тензора напряжений (ось z — вдоль длины стержня), связанная с тензором деформации соотношением (см. § 5)

$$\sigma_{zz} = Eu_{zz} = E\frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Подставляя это в общее уравнение движения

$$\rho \ddot{u}_z = \frac{\partial \sigma_{zk}}{\partial x_k},$$

находим

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = 0. \tag{25.1}$$

Это есть уравнение продольных колебаний в стержнях. Мы видим, что оно имеет вид обычного волнового уравнения. Скорость распространения продольных волн в стержнях оказывается равной

$$\left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2}. \tag{25.2}$$

Сравнив ее с выражением (22.4) для c_l, видим, что она меньше скорости распространения продольных волн в неограниченной среде.

Перейдем теперь к продольным волнам в тонких пластинках. Уравнения движения для таких колебаний можно написать сра-

зу, подставив в уравнениях равновесия (13.4) $-\rho h\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$ и $-\rho h\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}$ вместо P_x, и P_y:

$$\begin{aligned}
\frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= \frac{1}{1-\sigma^2}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1+\sigma)}\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{1}{2(1-\sigma)}\frac{\partial^2 u_y}{\partial x\,\partial y},\\
\frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= \frac{1}{1-\sigma^2}\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{1}{2(1+\sigma)}\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1-\sigma)}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\,\partial y}.
\end{aligned} \tag{25.3}$$

Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси x, т. е. волну, в которой деформация зависит только от координаты x, но не от y. Тогда уравнения (25.3) сильно упрощаются и принимают вид

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho(1-\sigma^2)}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} - \frac{E}{2\rho(1+\sigma)}\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = 0. \tag{25.4}$$

Мы получаем, таким образом, опять простые волновые уравнения. Стоящие в них коэффициенты различны для u_x и u_y. Скорость распространения волны с колебаниями, параллельными направлению распространения (u_x), равна

$$\left(\frac{E}{\rho(1-\sigma^2)}\right)^{1/2}. \tag{25.5}$$

Скорость же волны (u_y) с колебаниями, перпендикулярными направлению распространения (но по-прежнему лежащими в плоскости пластинки), равна скорости c_t поперечных волн в неограниченной среде.

Мы видим, таким образом, что продольные волны в стержнях и пластинках обладают таким же характером, как и волны в неограниченной среде, отличаясь лишь величиной своей скорости, по-прежнему не зависящей от частоты. Совсем иные соотношения получаются для *волн изгиба* в пластинках и стержнях, при которых колебания происходят в направлении, перпендикулярном к оси стержня или плоскости пластинки, т. е. сопровождаются их изгибом.

Уравнения свободных колебаний пластинки можно написать непосредственно на основании уравнения равновесия (12.5). Для этого надо заменить в нем $-P$ произведением ускорения $\ddot{\zeta}$ на массу ρh, приходящуюся на единицу площади поверхности пластинки. Таким образом, получаем

$$\rho\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \frac{D}{h}\Delta^2\zeta = 0 \tag{25.6}$$

(Δ — двумерный оператор Лапласа).

Рассмотрим монохроматическую упругую волну, соответственно чему будем искать решение уравнения (25.6) в виде

$$\zeta = \mathrm{const} \cdot e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)} \tag{25.7}$$

(волновой вектор $\mathbf{k}$ имеет, конечно, всего две компоненты k_x и k_y). Подстановка в (25.6) приводит к уравнению

$$-\rho\omega^2 + \frac{D}{h}k^4 = 0.$$

Отсюда получаем следующее соотношение между частотой и волновым вектором волны:

$$\omega = k^2 \left(\frac{D}{\rho h}\right)^{1/2} = k^2 \left(\frac{h^2 E}{12\rho(1-\sigma^2)}\right)^{1/2}. \tag{25.8}$$

Таким образом, частота оказывается пропорциональной квадрату абсолютной величины волнового вектора, в то время как в волнах в неограниченной среде она пропорциональна первой ее степени.

Зная закон дисперсии волн, можно найти скорость их распространения согласно формуле (23.4). В данном случае находим

$$U = \left[\frac{h^2 E}{3\rho(1-\sigma^2)}\right]^{1/2} k. \tag{25.9}$$

Таким образом, скорость распространения волн изгиба по пластинке пропорциональна волновому вектору, а не постоянна, как для волн в неограниченной трехмерной среде [1]).

Аналогичные результаты справедливы и для волн изгиба тонких стержней; колебания изгиба предполагаются малыми. Уравнения движения получим, заменив в уравнениях равновесия слабо изогнутого стержня (20.4) силы $-K_x$, $-K_y$ произведениями ускорений $\ddot{X}$, $\ddot{Y}$ на массу ρS единицы длины стержня (S — площадь его сечения). Таким образом,

$$\rho S \ddot{X} = E I_y \frac{\partial^4 X}{\partial z^4}, \qquad \rho S \ddot{Y} = E I_x \frac{\partial^4 Y}{\partial z^4}. \tag{25.10}$$

Решение этих уравнений снова ищем в виде

$$X = \mathrm{const} \cdot e^{i(kz - \omega t)}, \qquad Y = \mathrm{const} \cdot e^{i(kz - \omega t)},$$

[1]) Волновой вектор $k = 2\pi/\lambda$, где λ — длина волны. Поэтому, согласно (25.9), скорость U должна была бы неограниченно возрастать при $\lambda \to 0$. Физическая бессмысленность этого результата связана с тем, что формула (25.9) в действительности неприменима к слишком коротким волнам.

и находим следующий закон дисперсии:

$$\omega^{(x)} = \left(\frac{EI_y}{\rho S}\right)^{1/2} k^2, \qquad \omega^{(y)} = \left(\frac{EI_x}{\rho S}\right)^{1/2} k^2 \tag{25.11}$$

для колебаний вдоль осей x и y. Соответствующие скорости распространения:

$$U^{(x)} = 2\left(\frac{EI_y}{\rho S}\right)^{1/2} k, \qquad U^{(y)} = 2\left(\frac{EI_x}{\rho S}\right)^{1/2} k. \tag{25.12}$$

Наконец, рассмотрим крутильные колебания стержня. Уравнение движения стержня, подвергаемого деформации кручения, получается приравниванием выражения $C\partial\tau/\partial z$ (см. § 16, 18) производной по времени от момента импульса единицы длины стержня. Этот момент равен $\rho I\, \partial\varphi/\partial t$, где $\partial\varphi/\partial t$ — угловая скорость вращения (φ — угол поворота данного сечения), а

$$I = \int (x^2 + y^2)\, df$$

— момент инерции сечения стержня относительно его центра инерции (при чисто крутильных колебаниях каждое сечение совершает вращательные колебания вокруг оси инерции стержня, остающейся неподвижной). Написав $\tau = \partial\varphi/\partial z$, находим уравнение движения в виде

$$C\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \rho I \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}. \tag{25.13}$$

Отсюда видно, что скорость распространения крутильных колебаний вдоль стержня равна

$$\left(\frac{C}{\rho I}\right)^{1/2}. \tag{25.14}$$

З а д а ч и

1. Определить частоты продольных собственных колебаний стержня (длины l), один из концов которого закреплен, а другой — свободен.

Р е ш е н и е. На закрепленном конце ($z = 0$) должно быть $u_z = 0$, а на свободном конце ($z = l$) $\sigma_{zz} = Eu_{zz} = 0$, т. е. $\partial u_z/\partial z = 0$. Ищем решение уравнения (25.1) в виде

$$u_z = A\cos(\omega t + \alpha)\sin kz, \quad k = \omega\left(\frac{\rho}{E}\right)^{1/2}.$$

Из условия при $z = l$ имеем $\cos kl = 0$, откуда для собственных частот находим

$$\omega = \left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2} \frac{\pi}{2l}(2n+1)$$

(n — целые числа).

2. То же для стержня, оба конца которого свободны или оба закреплены.
Р е ш е н и е. В обоих случаях

$$\omega = \left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2} \frac{\pi}{l} n.$$

3. Определить частоты собственных колебаний струны (длины l).
Р е ш е н и е. Уравнение движения струны:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial z^2} - \frac{\rho S}{T}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = 0$$

(ср. уравнение равновесия (20.17)). Граничные условия: $X = 0$ при $z = 0,\ l$. Собственные частоты:

$$\omega = \left(\frac{\rho S}{T}\right)^{1/2} \frac{\pi n}{l}.$$

4. Определить частоты поперечных собственных колебаний стержня (длины l) с заделанными концами.

Р е ш е н и е. Уравнение (25.10) при подстановке в него

$$X = X_0(z)\, \cos(\omega t + \alpha)$$

приобретает вид

$$\frac{d^4 X_0}{dz^4} = \varkappa^4 X_0, \qquad \varkappa^4 = \omega^2 \frac{\rho S}{E I_y}.$$

Общий интеграл этого уравнения есть

$$X_0 = A\, \cos\varkappa z + B\, \sin\varkappa z + C\, \operatorname{ch}\varkappa z + D\, \operatorname{sh}\varkappa z.$$

Постоянные A, B, C, D определяются из граничных условий $X = 0$, $dX/dz = 0$ при $z = 0,\ l$. В результате находим

$$X_0 = A\,\{(\sin\varkappa l - \operatorname{sh}\varkappa l)(\cos\varkappa z - \operatorname{ch}\varkappa z) - (\cos\varkappa l - \operatorname{ch}\varkappa l)(\sin\varkappa z - \operatorname{sh}\varkappa z)\}$$

и уравнение

$$\cos\varkappa l\, \operatorname{ch}\varkappa l = 1,$$

корни которого определяют собственные частоты колебаний. Наименьшая из собственных частот равна

$$\omega_{\min} = \frac{22,4}{l^2}\frac{E I_y}{\rho S}.$$

5. То же для стержня с опертыми концами.
Р е ш е н и е аналогично решению задачи 4. Результат:

$$X_0 = A\, \sin\varkappa z,$$

а частоты определяются из $\sin\varkappa l = 0$, т. е.

$$\varkappa = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Наименьшая частота есть

$$\omega_{\min} = \frac{9,87}{l^2}\frac{E I_y}{\rho S}.$$

6. То же для стержня, заделанного на одном конце и свободного на другом.

Решение. Получаем для смещения

$$X_0 = A\{(\cos\varkappa l + \operatorname{ch}\varkappa l)(\cos\varkappa z - \operatorname{ch}\varkappa z) + (\sin\varkappa l - \operatorname{sh}\varkappa l)(\sin\varkappa z - \operatorname{sh}\varkappa z)\}$$

(закрепленный конец $z = 0$, свободный $z = l$), и уравнение

$$\cos\varkappa l \operatorname{ch}\varkappa l + 1 = 0$$

для собственных частот. Наименьшая частота есть

$$\omega_{\min} = \frac{3,52}{l^2}\frac{EI_y}{\rho S}.$$

7. Определить собственные колебания прямоугольной пластинки (длины сторон a и b) с опертыми краями.

Решение. Уравнение (25.6) при подстановке в него

$$\zeta = \zeta_0(x, y)\cos(\omega t + \alpha)$$

приобретает вид

$$\Delta\Delta\zeta_0 - \varkappa^4\zeta_0 = 0, \qquad \varkappa^4 = \omega^2\frac{12\rho(1-\sigma^2)}{h^2 E}.$$

Выбираем оси координат по сторонам пластинки. Граничные условия (12.11) приобретают вид

$$\text{при } x = 0,\ a: \qquad \zeta = 0, \qquad \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} = 0;$$

$$\text{при } y = 0,\ b: \qquad \zeta = 0, \qquad \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} = 0.$$

Удовлетворяющее этим условиям решение есть

$$\zeta_0 = A\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

(m, n — целые числа), причем частоты определяются равенством

$$\omega = \frac{Eh}{12\rho(1-\sigma^2)}\pi^2\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right].$$

8. Определить собственные частоты колебаний мембраны прямоугольной формы (с длинами сторон a и b).

Решение. Уравнение колебаний мембраны

$$T\,\Delta\zeta = \rho h\ddot{\zeta}$$

(ср. уравнение равновесия (14.9)). Края мембраны должны быть закреплены так, что $\zeta = 0$. Соответствующее решение для прямоугольной мембраны есть

$$\zeta = A\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\cos\omega t,$$

где собственные частоты

$$\omega^2 = \frac{T}{\rho h}\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)$$

(m, n — целые числа).

9. Определить скорость распространения крутильных колебаний по стержням с сечением в виде круга, эллипса и равностороннего треугольника и по стержню, имеющему вид длинной прямоугольной тонкой пластинки.

Решение. Для кругового сечения (радиуса R) момент инерции $I = \pi R^4/2$; взяв C из задачи 1 § 16, получим для скорости значение $(\mu/\rho)^{1/2}$, совпадающее со скоростью c_t.

Аналогично (используя результаты задач 2–4 § 16) получаем для стержня эллиптического сечения скорость

$$\frac{2ab}{a^2+b^2}c_t;$$

для стержня с сечением в виде равностороннего треугольника

$$(3/5)^{1/2}\,c_t;$$

для стержня в виде длинной прямоугольной пластинки

$$2\frac{h}{d}c_t.$$

Все эти скорости меньше c_t.

10. Поверхность бесконечно глубокой несжимаемой жидкости покрыта тонкой упругой пластинкой. Определить связь между волновым вектором и частотой для волн, одновременно распространяющихся по пластинке и в поверхностном слое жидкости.

Решение. Выбираем плоскость пластинки в качестве плоскости $z=0$, а ось x выбираем вдоль направления распространения волны; области жидкости пусть соответствуют $z<0$. Уравнение движения свободной пластинки есть

$$\rho_0 h\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = -D\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^4}$$

(ρ_0 — плотность материала пластинки). При наличии жидкости к правой части этого уравнения надо прибавить силу, действующую со стороны жидкости на 1 см^2 поверхности пластинки, т. е. давление p жидкости. Но давление в волне выражается через потенциал скорости посредством $p = -\rho\,\partial\varphi/\partial t$ (полем тяжести пренебрегаем). Поэтому получаем уравнение

$$\rho_0 h\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = -D\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^4} - \rho\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{z=0}. \quad (1)$$

Далее, нормальная компонента скорости жидкости на ее поверхности должна быть равна скорости точек пластинки, откуда получаем условие

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=0}. \quad (2)$$

Потенциал φ должен удовлетворять во всем объеме жидкости уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (3)$$

Ищем ζ в виде бегущей волны $\zeta = \zeta_0 e^{ikx-i\omega t}$; соответственно этому берем решение уравнения (3) в виде затухающей в глубь жидкости поверхностной волны

$$\varphi = \varphi_0 e^{i\,(kx-\omega t)}e^{kz}.$$

Подстановка этих выражений в (1) и (2) приводит к двум уравнениям для φ_0 и ζ_0 из условия совместности которых получаем

$$\omega^2 = D\frac{k^5}{(\rho + h\rho_0 k)}.$$

§ 26. Ангармонические колебания

Вся изложенная теория упругих колебаний является приближенной в том же смысле, в каком приближенна вообще вся теория упругости, основанная на законе Гука. Напомним, что в ее основе лежит разложение упругой энергии в ряд по степеням тензора деформации, причем оставляются члены до второго порядка включительно. Соответственно этому компоненты тензора напряжений оказываются линейными функциями компонент тензора деформации, и уравнения движения — линейны.

Наиболее характерной особенностью упругих волн в этом приближении является то, что всякую волну можно представить в виде простого наложения, т. е. в виде линейной комбинации отдельных монохроматических волн. Каждая из этих монохроматических волн распространяется независимо от остальных и может существовать также и сама по себе, не сопровождаясь какими-либо посторонними движениями. Можно сказать, что различные монохроматические волны, одновременно распространяющиеся в одной и той же среде, «не взаимодействуют» друг с другом.

Все эти свойства, однако, исчезают при переходе к следующим приближениям. Эффекты следующих приближений хотя и являются малыми, но для некоторых явлений могут играть основную роль. Эти эффекты обычно называют *ангармоническими* в связи с тем, что соответствующие уравнения движения нелинейны и не допускают простых периодических (гармонических) решений.

Мы рассмотрим здесь ангармонические эффекты третьего порядка, происходящие от кубических по деформации членов в упругой энергии. В общем виде соответствующие уравнения движения оказываются очень громоздкими. Выяснить же характер возникающих эффектов можно с помощью следующих рассуждений. Кубические члены в упругой энергии дают квадратичные члены в тензоре напряжений, а потому и в уравнениях движения. Представим себе, что в этих уравнениях все линейные члены перенесены в левые, а все квадратичные — в правые части равенств. Решая эти уравнения методом последовательных приближений, мы должны в первом приближении вовсе отбросить квадратичные члены. Тогда останутся обычные линейные уравнения, решение $\mathbf{u}_0$ которых может быть представлено в виде наложения монохроматических бегущих волн вида $\mathrm{const}\cdot e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}$ с определенными соотношениями между ω и $\mathbf{k}$. Переходя к следующему, второму, приближению, надо положить $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$, причем в правой стороне уравнений (в квадратичных членах) надо сохранить только члены с $\mathbf{u}_0$. Поскольку $\mathbf{u}_0$ удовлетворяет, по определению, однородным линейным уравнениям без правых

частей, то в левой части равенств члены с $\mathbf{u}_0$ взаимно сокращаются. В результате мы получим для компонент вектора $\mathbf{u}_1$ систему неоднородных линейных уравнений, в правой части которых стоят заданные функции координат и времени. Эти функции, получающиеся подстановкой $\mathbf{u}_0$ в правые части исходных уравнений, представляют собой сумму членов, каждый из которых пропорционален множителю вида $e^{i\,[(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\,\mathbf{r}-(\omega_1-\omega_2)\,t]}$, или $e^{i\,[(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)\,\mathbf{r}-(\omega_1+\omega_2)\,t]}$, где ω_1, ω_2 и $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ — частоты и волновые векторы каких-либо двух монохроматических волн первого приближения.

Как известно, частный интеграл линейных уравнений такого вида представляет собой сумму членов с такими же экспоненциальными множителями, какие стоят в свободных членах (правых частях) уравнений, и с надлежащим образом подобранными коэффициентами. Каждый из этих членов соответствует бегущей волне с частотой $\omega_1 \pm \omega_2$ и волновым вектором $\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2$ (частоты, равные сумме или разности частот исходных волн, называют *комбинационными*).

Таким образом, эффекты ангармоничности третьего порядка приводят к тому, что на совокупность основных монохроматических волн (с частотами ω_1, ω_2, ... и волновыми векторами $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, ...) налагаются некоторые «волны» слабой интенсивности с комбинационными частотами вида $\omega_1 \pm \omega_2$ и волновыми векторами $\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2$. Мы говорим здесь о них как о «волнах» в кавычках, имея в виду, что они представляют собой некоторый поправочный эффект и не могут существовать сами по себе (за исключением некоторых особых случаев; см. ниже). Между $\omega_1 \pm \omega_2$ и $\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2$ не удовлетворяются, вообще говоря, те соотношения, которые имеют место для частот и волновых векторов в обычных монохроматических волнах.

Ясно, однако, что возможны и такие специальные подборы значений ω_1, $\mathbf{k}_1$ и ω_2, $\mathbf{k}_2$, при которых между $\omega_1 + \omega_2$ и $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ (будем говорить для определенности о суммах, а не о разностях) будет выполняться одно из тех соотношений, которые должны иметь место для монохроматических волн в данной среде. Вводя обозначения $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ и $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$, мы можем сказать с математической точки зрения, что ω_3, $\mathbf{k}_3$ соответствуют в этих случаях волнам, удовлетворяющим однородным линейным уравнениям движения (без правой части) первого приближения. Если в правой части уравнений движения второго приближения имеются члены, пропорциональные $e^{i\,(\mathbf{k}_3\mathbf{r}-\omega_3 t)}$ с такими ω_3, $\mathbf{k}_3$, то, как известно, частный интеграл этих уравнений будет представлять собой волну этой частоты с амплитудой, неограниченно возрастающей со временем.

Таким образом, наложение двух монохроматических волн ω_1, $\mathbf{k}_1$ и ω_2, $\mathbf{k}_2$, для которых суммы ω_3, $\mathbf{k}_3$ удовлетворяют указанно-

му условию, приводит в результате эффекта ангармоничности к явлению резонанса — возникает новая настоящая монохроматическая волна ω_3, $\mathbf{k}_3$, амплитуда которой возрастает со временем и в конце концов перестает быть малой. Очевидно, что если при наложении волн ω_1, $\mathbf{k}_1$ и ω_2, $\mathbf{k}_2$ возникает волна ω_3, $\mathbf{k}_3$, то при наложении волн ω_1, $\mathbf{k}_1$ и ω_3, $\mathbf{k}_3$ тоже будет иметь место резонанс и возникает волна $\omega_2 = \omega_3 - \omega_1$, $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1$, а при наложении волн ω_2, $\mathbf{k}_2$ и ω_3, $\mathbf{k}_3$ возникает волна ω_1, $\mathbf{k}_1$.

В частности, в изотропном теле ω связано с $\mathbf{k}$ посредством $\omega = c_t k$ или $\omega = c_l k$, причем $c_l > c_t$. Легко видеть, в каких случаях возможно выполнение какого-либо из этих соотношений для каждой из трех волн: ω_1, $\mathbf{k}_1$; ω_2, $\mathbf{k}_2$ и $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$. Если $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ не совпадают по направлению, то $k_3 < k_1 + k_2$; ясно поэтому, что при таких $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ резонанс возможен лишь в следующих двух случаях: 1) волны ω_1, $\mathbf{k}_1$ и ω_2, $\mathbf{k}_2$ поперечны, а волна ω_3, $\mathbf{k}_3$ продольна; 2) одна из волн ω_1, $\mathbf{k}_1$ или ω_2, $\mathbf{k}_2$ продольна, другая поперечна, а волна ω_3, $\mathbf{k}_3$ продольна. Если же векторы $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ имеют одинаковое направление, то резонанс возможен в случаях, когда все три волны продольны или все три поперечны.

Эффект ангармоничности с явлением резонанса возникает не только при наложении нескольких монохроматических волн, но и при наличии всего одной только волны ω_1, $\mathbf{k}_1$. В этом случае в правой части уравнений движения имеются члены, пропорциональные $e^{2i(\mathbf{k}_1\mathbf{r}-\omega_1 t)}$. Но если для ω_1, $\mathbf{k}_1$ удовлетворяется обычное соотношение, то (в силу однородности первого порядка этого соотношения) оно удовлетворяется и для $2\omega_1$, $2\mathbf{k}_1$. Таким образом, эффект ангармоничности приводит к появлению наряду с каждой из имеющихся монохроматических волн ω_1, $\mathbf{k}_1$ также и волны $2\omega_1$, $2\mathbf{k}_1$ с удвоенными частотой и волновым вектором, причем амплитуда этой волны растет со временем.

Наконец, остановимся коротко на том, каким образом могут быть составлены уравнения движения с учетом ангармонических членов. Тензор деформации должен определяться теперь полным выражением (1.3)

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right), \tag{26.1}$$

в котором нельзя пренебречь квадратичными по u_i членами. Далее, общее выражение для плотности энергии $\mathcal{E}$ [1]) для тел с данной симметрией должно быть написано как скаляр, составленный из компонент тензора u_{ik} и некоторых характерных для вещества тела постоянных тензоров, содержащих члены до желаемой степени по u_{ik}. Подставляя затем выражение (26.1) для u_{ik}

[1]) Мы говорим здесь о внутренней энергии $\mathcal{E}$, а не о свободной энергии F, поскольку речь идет об адиабатических колебаниях.

и отбрасывая члены слишком высоких порядков по u_i, получим энергию $\mathcal{E}$ как функцию производных $\partial u_i/\partial x_k$ с желаемой степенью точности.

Для того чтобы получить уравнения движения, заметим следующее. Вариация $\delta\mathcal{E}$ может быть написана в виде

$$\delta\mathcal{E} = \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial(\partial u_i/\partial x_k)}\delta\frac{\partial u_i}{\partial x_k},$$

или, вводя обозначение:

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial(\partial u_i/\partial x_k)}, \tag{26.2}$$

переписываем $\delta\mathcal{E}$ следующим образом:

$$\delta\mathcal{E} = \sigma_{ik}\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}(\sigma_{ik}\delta u_i) - \delta u_i\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}.$$

Коэффициенты при $-\delta u_i$ представляют собой компоненты силы, отнесенной к единице объема тела. Они имеют формально прежний вид, и потому уравнения движения могут быть написаны по-прежнему в виде

$$\rho_0\ddot{u}_i = \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}, \tag{26.3}$$

где ρ_0 — плотность недеформированного тела, а компоненты тензора σ_{ik} определяются теперь, согласно (26.2), с $\mathcal{E}$, написанным с желаемой степенью точности. Тензор σ_{ik} теперь не симметричен.

Подчеркнем, что σ_{ik} не имеет теперь смысла плотности потока импульса (тензора напряжений). В обычной теории такое истолкование получалось в результате интегрирования плотности объемной силы $\partial\sigma_{ik}/\partial x_k$ по объему тела. При этом существенно, что при интегрировании мы не делали различия между координатами точек тела до и после деформирования, пренебрегая разницей между ними. Однако при переходе к следующим приближениям такое пренебрежение становится невозможным, и поверхность, ограничивающая область интегрирования, не совпадает с реальной поверхностью рассматриваемого участка тела после его деформирования.

В § 2 было показано, что симметричность тензора σ_{ik} связана с сохранением момента импульса. Теперь этот результат не имеет места в связи с тем, что плотность момента импульса должна записываться не в виде $x_i\dot{u}_k - x_k\dot{u}_i$, а как

$$(x_i + u_i)\dot{u}_k - (x_k + u_k)\dot{u}_i.$$

Задача

Написать общее выражение для упругой энергии изотропного тела в третьем приближении.

Решение. Из компонент симметрического тензора второго ранга можно составить два квадратичных скаляра (u_{ik}^2 и u_{ll}^2) и три кубических (u_{ll}^3, $u_{ll}u_{ik}^2$, $u_{ik}u_{il}u_{kl}$). Поэтому наиболее общий вид скалярного выражения, содержащего члены второй и третьей степеней по u_{ik} со скалярными же (изотропное тело!) коэффициентами, есть

$$\mathcal{E} = \mu u_{ik}^2 + \left(\frac{K}{2} - \frac{\mu}{3}\right) u_{ll}^2 + \frac{A}{3} u_{ik}u_{il}u_{kl} + B u_{ik}^2 u_{ll} + \frac{C}{3} u_{ll}^3$$

(коэффициенты при u_{ik}^2 и u_{ll}^2 выражены через модули сжатия и сдвига; A, B, C — три новые постоянные). Подставляя сюда выражение (26.1) для u_{ik} и оставляя члены до третьего порядка включительно, получим упругую энергию в виде

$$\mathcal{E} = \frac{\mu}{4}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{K}{2} - \frac{\mu}{3}\right)\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)^2 + \\ + \left(\mu + \frac{A}{4}\right)\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \left(\frac{B+K}{2} - \frac{\mu}{3}\right)\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)^2 + \\ + \frac{A}{12}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\frac{\partial u_l}{\partial x_i} + \frac{B}{2}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_l} + \frac{C}{3}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)^3.$$

ГЛАВА IV

ДИСЛОКАЦИИ [1]

§ 27. Упругие деформации при наличии дислокации

Упругие деформации в кристалле могут быть связаны не только с воздействием на него внешних сил, но и с наличием в нем внутренних дефектов структуры. Основным видом таких дефектов, существенных для механических свойств кристаллов, являются так называемые *дислокации*. Изучение свойств дислокаций с атомарной, микроскопической точки зрения не входит, разумеется, в план этой книги; мы рассмотрим здесь лишь чисто макроскопические аспекты этого явления с точки зрения теории упругости. Однако для лучшего уяснения физического смысла излагаемых соотношений предварительно напомним на двух простых примерах, в чем заключается характер дислокационных дефектов с точки зрения структуры кристаллической решетки.

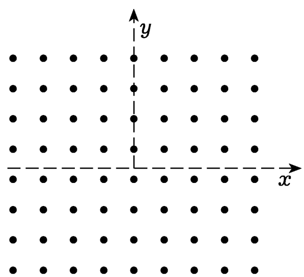


Рис. 22

Представим себе, что в кристаллическую решетку (разрез которой изображен на рис. 22) вдвинута «лишняя» кристаллическая полуплоскость (совпадающая на рисунке с верхней полуплоскостью yz). Линия края этой полуплоскости (перпендикулярная плоскости рисунка ось z) называется в этом случае *краевой дислокацией*. Искажение структуры решетки в непосредственной близости к дислокации велико, но уже на расстояниях порядка нескольких периодов кристаллические плоскости смыкаются друг с другом почти правильным образом. Деформация существует, однако, и вдали от дислокации. Она ясно обнаруживается при обходе в плоскости xy по узлам решетки вдоль замкнутого контура вокруг начала координат: если определять вектором $\mathbf{u}$ смещение каждого узла от его положения в идеальной решетке, то полное приращение этого вектора при обходе будет отлично от нуля и равно одному периоду вдоль оси x.

---

[1] Эта глава написана совместно с А.М. Косевичем.

Другой тип дислокации можно наглядно представить себе как результат «разреза» решетки по полуплоскости, после чего части решетки по обе стороны разреза сдвигаются относительно друг друга на один период параллельно краю разреза (который называется в этом случае *винтовой дислокацией*). Наличие такой дислокации превращает кристаллические плоскости в решетке в геликоидальную поверхность (подобную винтовой лестнице без ступенек). При полном обходе вокруг линии дислокации (ось геликоидальной поверхности) вектор смещения узлов получает приращение на один период параллельно этой оси. На рис. 23 изображена схема описанного разреза.

С макроскопической точки зрения дислокационная деформация кристалла как сплошной среды обладает в общем случае следующим свойством: при обходе по любому замкнутому контуру L, охватывающему линию дислокации D, вектор упругого смещения $\mathbf{u}$ получает определенное конечное приращение $\mathbf{b}$,

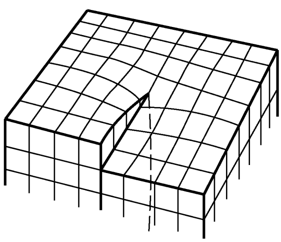


Рис. 23

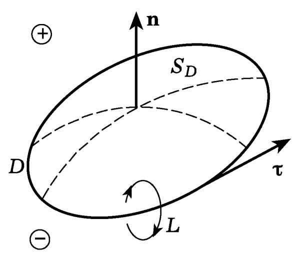


Рис. 24

равное (по величине и направлению) одному из периодов решетки; постоянный вектор $\mathbf{b}$ называется *вектором Бюргерса* данной дислокации. Это свойство записывается в виде

$$\oint_L du_i = \oint_L \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k = -b_i, \tag{27.1}$$

причем принимается, что направление обхода контура связано правилом винта с выбранным направлением вектора касательной к линии дислокации $\boldsymbol{\tau}$ (рис. 24). Сама линия дислокации является при этом линией особых точек поля деформации.

Упомянутым выше простым случаям краевой и винтовой дислокаций отвечают прямые линии D, вдоль которых $\boldsymbol{\tau} \perp \mathbf{b}$ или $\boldsymbol{\tau} \parallel \mathbf{b}$. Отметим также, что в изображенной на рис. 22 наглядной картине краевые дислокации с противоположными направлениями $\mathbf{b}$ различаются тем, что «лишняя» кристаллическая полуплоскость лежит сверху или снизу от плоскости xy (о таких дислокациях говорят как о различающихся по знаку).

В общем случае дислокация является кривой линией, вдоль которой угол между $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{b}$ меняется. Самый же вектор Бюргерса $\mathbf{b}$ неизбежно постоянен вдоль всей линии дислокации. Очевидно также, что линия дислокации не может просто окончиться внутри кристалла (ср. ниже примеч. на с. 160). Она должна выходить обоими концами на поверхность кристалла либо (как это обычно и бывает в реальных условиях) представлять собой замкнутую петлю.

Условие (27.1) означает, другими словами, что при наличии дислокации вектор смещения является неоднозначной функцией координат, получающей заданное приращение при обходе вокруг линии дислокации. Физически, разумеется, никакой неоднозначности нет: приращение $\mathbf{b}$ означает дополнительное смещение точек решетки на один из периодов, что вообще не меняет ее состояния. В частности, тензор напряжений σ_{ik}, характеризующий упругое состояние кристалла, является однозначной и непрерывной функцией координат.

Для дальнейшего будет удобным ввести обозначение

$$w_{ik} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i}, \tag{27.2}$$

с помощью которого условие (27.1) записывается в виде

$$\oint\limits_L w_{ik}\,dx_i = -b_k. \tag{27.3}$$

Тензор w_{ik} (несимметричный) принято называть *тензором дисторсии*. Его симметричная часть дает обычный тензор деформации

$$u_{ik} = \frac{1}{2}(w_{ik} + w_{ki}). \tag{27.4}$$

Тензоры w_{ik} и u_{ik} — однозначные функции координат, в противоположность неоднозначной функции $\mathbf{u}(\mathbf{r})$.

Условие (27.3) можно записать и в дифференциальном виде. Для этого преобразуем интеграл по контуру L в интеграл по какой-либо поверхности S_L, опирающейся на этот контур [1]):

$$\oint\limits_L w_{mk}\,dx_m = \int\limits_{S_L} e_{ilm}\frac{\partial w_{mk}}{\partial x_l}df_i. \tag{27.5}$$

---

[1]) Согласно теореме Стокса преобразование осуществляется заменой элемента интегрирования по линии dx_m оператором

$$dx_m \to e_{ilm}\,df_i\,\frac{\partial}{\partial x_l},$$

где e_{ilm} — единичный антисимметричный тензор, df — элемент площади. Напомним, что выражение вида $e_{ilm}a_ib_l$ есть компонента $[\mathbf{ab}]_m$ векторного произведения векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Поскольку тензор e_{ilm} антисимметричен по индексам l, m, а тензор $\partial w_{mk}/\partial x_l = \partial^2 u_k/\partial x_l\,\partial x_m$ симметричен по этим же индексам, то подынтегральное выражение тождественно равно нулю везде, за исключением точки пересечения линии D с поверхностью S_L; на самой линии дислокации, как линии особых точек, представление w_{mk} в виде производных (27.2) теряет смысл [1]). В этих точках величины w_{ik} надо определить с помощью соответствующей δ-функции так, чтобы интеграл (27.5) приобрел требуемое значение $-b_k$. Пусть $\boldsymbol{\xi}$ — двухмерный радиус-вектор, отсчитываемый от оси дислокации в данной ее точке в плоскости, перпендикулярной вектору $\boldsymbol{\tau}$. Элемент площади этой плоскости выражается через элемент $d\mathbf{f}$ поверхности S_L как $\boldsymbol{\tau}\,d\mathbf{f}$. По определению двумерной δ-функции $\delta(\boldsymbol{\xi})$ имеем

$$\int \delta(\boldsymbol{\xi})\,\boldsymbol{\tau}\,d\mathbf{f} = \tau_i \int_{S_L} \delta(\boldsymbol{\xi})\,df_i = 1.$$

Ясно поэтому, что для достижения поставленной цели надо положить

$$e_{ilm}\frac{\partial w_{mk}}{\partial x_l} = -\tau_i b_k \delta(\boldsymbol{\xi}). \tag{27.6}$$

Это и есть искомая дифференциальная запись условия (27.3).

Поле смещений $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ вокруг дислокации может быть выражено в общем виде, если известен тензор Грина G_{ik} уравнений равновесия данной анизотропной среды, т. е. функция, определяющая смещение u_i, созданное в неограниченной среде сосредоточенной в начале координат единичной силой, направленной вдоль оси x_k (см. § 8). Это легко сделать с помощью следующего формального приема.

Вместо того чтобы искать неоднозначные решения уравнений равновесия, будем рассматривать $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ как однозначную функцию, условившись, что она испытывает заданный скачок $\mathbf{b}$ на некоторой произвольно выбранной поверхности S_D, опирающейся на дислокационную петлю D. Если $\mathbf{u}_+$ и $\mathbf{u}_-$ — значения функции соответственно на верхнем и нижнем берегах разрыва S_D, то

$$\mathbf{u}_+ - \mathbf{u}_- = \mathbf{b}. \tag{27.7}$$

(«Верхний» и «нижний» берега определены на рис. 24. Нормаль $\mathbf{n}$ к поверхности S_D, направленная по отношению к $\boldsymbol{\tau}$ указанным на рисунке образом, дает направление от нижнего берега к верхнему.) Интегрирование по контуру L от верхнего берега к нижнему дает тогда результат (27.3) с правильным знаком. Тензоры w_{ik} и u_{ik}, формально определенные согласно (27.3), (27.4),

---

[1]) Если бы линия дислокации оканчивалась в какой-либо точке внутри тела, то поверхность S_L могла бы быть выбрана охватывающей эту точку и тем самым нигде не пересекающей линию D. Тогда интеграл (27.5) обратился бы в нуль — в противоречии с поставленным условием.

будут иметь на «поверхности разрыва» δ-образную особенность:

$$w_{ik}^{(S)} = n_i b_k \delta(\zeta), \quad u_{ik}^{(S)} = \frac{1}{2}(n_i b_k + n_k b_i)\delta(\zeta), \tag{27.8}$$

где ζ — координата, отсчитываемая от поверхности S_D вдоль нормали $\mathbf{n}$ ($d\zeta = \mathbf{n}\,d\mathbf{l}$, где $d\mathbf{l}$ — элемент длины контура L).

Поскольку никакой физической особенности в среде вокруг дислокации в действительности нет, то тензор напряжений σ_{ik}, как уже было указано, должен быть однозначной везде непрерывной функцией. Между тем с тензором деформации (27.8) формально связан тензор напряжений

$$\sigma_{ik}^{(S)} = \lambda_{iklm} u_{lm}^{(S)},$$

тоже имеющий особенность на поверхности S_D. Для того чтобы исключить его, надо ввести фиктивные объемные силы, распределенные вдоль поверхности S_D с определенной плотностью $\mathbf{f}^{(S)}$. Уравнения равновесия при наличии объемных сил имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + f_i^{(S)} = 0.$$

Отсюда ясно, что надо положить

$$f_i^{(S)} = -\frac{\partial \sigma_{ik}^{(S)}}{\partial x_k} = -\lambda_{iklm}\frac{\partial u_{lm}^{(S)}}{\partial x_k}. \tag{27.9}$$

Таким образом, задача об отыскании неоднозначной функции $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ эквивалентна задаче об отыскании однозначной, но разрывной функции при наличии объемных сил, определяемых формулами (27.8), (27.9). Теперь можно воспользоваться формулой

$$u_i(\mathbf{r}) = \int G_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') f_j^{(S)}(\mathbf{r}')\,dV'.$$

Подставив сюда (27.8), производим интегрирование по частям; интеграл по бесконечно удаленной поверхности исчезает, а в оставшемся интеграле по объему δ-функция устраняется тривиальным образом. Заметив также, что $\partial G_{ij}/\partial x'_k = -\partial G_{ij}/\partial x_k$, получим окончательно

$$u_i(\mathbf{r}) = -\lambda_{jklm} b_m \int\limits_{S_D} n_l \frac{\partial}{\partial x_k} G_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\,df'. \tag{27.10}$$

Тем самым поставленная задача решена [1]).

[1]) Тензор G_{ij} для анизотропной среды найден в указанной на с. 44 статье. Этот тензор, вообще говоря, очень сложен. В случае прямолинейной дислокации, когда мы имеем дело с плоской задачей теории упругости, может оказаться проще непосредственно решать уравнения равновесия.

Наиболее простой вид деформация (27.10) имеет вдали от замкнутой дислокационной петли. Если представлять себе петлю расположенной вблизи начала координат, то на больших (по сравнению с ее линейными размерами) расстояниях в производной $\partial G_{ij}/\partial x_k$ можно положить $\mathbf{r}-\mathbf{r}'\approx\mathbf{r}$ и вынести ее за знак интеграла. Тогда получим

$$u_i(r) = -\lambda_{jklm} d_{lm} \frac{\partial G_{ij}(\mathbf{r})}{\partial x_k}, \tag{27.11}$$

где

$$d_{ik} = S_i b_k, \quad S_i = \int\limits_{S_D} n_i\, df = \frac{1}{2} e_{ikl} \oint\limits_D x_k\, dx_l. \tag{27.12}$$

Компоненты аксиального вектора $\mathbf{S}$ равны площадям, ограниченным проекциями петли D на плоскости, перпендикулярные соответствующим координатным осям; тензор d_{ik} естественно назвать тензором *дислокационного момента*. Компоненты тензора G_{ij} являются однородными функциями первого порядка от координат x, y, z (см. с. 45). Поэтому из (27.11) видно, что $u_i \backsim 1/r^2$. Соответствующее же поле напряжений $\sigma_{ik} \backsim 1/r^3$.

Легко выяснить также характер зависимости от расстояния упругих напряжений вокруг прямолинейной дислокации. В цилиндрических координатах z, r, φ (с осью z вдоль линии дислокации) деформация будет зависеть только от r и φ. Интеграл (27.3) не должен меняться, в частности, при произвольном подобном изменении размеров любого контура в плоскости xy. Очевидно, что это возможно, лишь если все $w_{ik} \backsim 1/r$. Той же степени $1/r$ будет пропорционален и тензор u_{ik}, а с ним и напряжения: $\sigma_{ik} \backsim 1/r$ [1]).

Хотя до сих пор мы говорили только о дислокациях, тем не менее полученные формулы применимы также и к деформациям, вызываемым другого рода дефектами кристаллической структуры. Дислокации — линейные дефекты структуры. Наряду с ними существуют дефекты, в которых нарушение правильной структуры распространяется по области вблизи некоторой поверхности [2]). С макроскопической точки зрения такой дефект может быть описан как поверхность разрыва, на которой вектор смещения $\mathbf{u}$ испытывает скачок (напряжения же σ_{ik} оста-

[1]) Обратим внимание на определенную аналогию между полем упругой деформации вокруг линии дислокации и магнитным полем линейных проводников; роль силы тока играет при этом вектор Бюргерса. Однако, не говоря уже о совершенно различной природе тех и других физических явлений, степень аналогичности уменьшается также и различием в тензорном характере соответствующих величин.

[2]) Известным примером такого рода дефектов является тонкая двойниковая прослойка в кристалле.

ются непрерывными в силу условий равновесия). Если на всей поверхности величина $\mathbf{b}$ скачка одинакова, то в отношении создаваемых им деформаций такой разрыв ничем не отличается от дислокации (расположенной вдоль его края). Разница состоит лишь в том, что вектор $\mathbf{b}$ не равен периоду решетки. Положение же поверхности S_D, о которой была речь выше, перестает быть произвольным и должно совпадать с фактическим расположением физического разрыва. С такой поверхностью разрыва связана определенная дополнительная энергия, что может быть описано путем введения соответствующего коэффициента поверхностного натяжения.

Задачи

1. Написать дифференциальные уравнения равновесия для дислокационной деформации в изотропной среде, выраженные через вектор смещения [1]).

Решение. В терминах тензора напряжений или тензора деформации уравнения равновесия имеют обычный вид: $\partial\sigma_{ik}/\partial x_k = 0$ или, подставив σ_{ik} из (5.11):

$$\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_k} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\frac{\partial u_{ll}}{\partial x_i} = 0. \tag{1}$$

Но при переходе к вектору $\mathbf{u}$ надо учесть дифференциальное условие (27.6). Умножив (27.6) на e_{ikn} и упростив по i, k, получим [2])

$$\frac{\partial w_{nk}}{\partial x_k} - \frac{\partial w_{kk}}{\partial x_n} = -[\boldsymbol{\tau}\mathbf{b}]_n\delta(\boldsymbol{\xi}). \tag{2}$$

Переписав (1) в виде

$$\frac{1}{2}\frac{\partial w_{ik}}{\partial x_k} + \frac{1}{2}\frac{\partial w_{ki}}{\partial x_k} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\frac{\partial w_{ll}}{\partial x_i} = 0$$

и подставив сюда (2), находим

$$\frac{\partial w_{ki}}{\partial x_k} + \frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial w_{ll}}{\partial x_i} = [\boldsymbol{\tau}\mathbf{b}]_i\delta(\boldsymbol{\xi}).$$

Переходя теперь к $\mathbf{u}$, согласно (27.2), находим искомое уравнение для неоднозначной функции $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ в виде

$$\Delta\mathbf{u} + \frac{1}{1-2\sigma}\nabla\operatorname{div}\mathbf{u} = [\boldsymbol{\tau}\mathbf{b}]\delta(\boldsymbol{\xi}). \tag{3}$$

Решение этого уравнения должно удовлетворять условию (27.1).

2. Определить деформацию вокруг прямолинейной винтовой дислокации в изотропной среде.

---

[1]) Физический смысл этой и других задач, относящихся к изотропной среде, условен, поскольку реальные дислокации по самому своему существу свойственны лишь кристаллам, т. е. анизотропной среде. Эти задачи, однако, представляют определенный иллюстративный интерес.

[2]) Напомним формулу

$$e_{ilm}e_{ikn} = \delta_{lk}\delta_{mn} - \delta_{ln}\delta_{mk}.$$

Решение. Выбираем цилиндрические координаты z, r, φ с осью z вдоль линии дислокации; вектор Бюргерса: $b_x = b_y = 0$, $b_z = b$. Из соображений симметрии очевидно, что смещение $\mathbf{u}$ параллельно оси z и не зависит от координаты z. Уравнение равновесия (3) задачи 1 сводится к $\Delta u_z = 0$. Решение, удовлетворяющее условию (27.1) [1]):

$$u_z = \frac{b}{2\pi}\varphi.$$

У тензоров u_{ik} и σ_{ik} отличны от нуля лишь компоненты

$$u_{z\varphi} = \frac{b}{4\pi r}, \quad \sigma_{z\varphi} = \frac{\mu b}{2\pi r},$$

так что деформация представляет собой чистый сдвиг.

Свободная энергия дислокации (на единицу ее длины) дается интегралом

$$F = \frac{1}{2}\int 2u_{z\varphi}\sigma_{z\varphi}\,dV = \frac{\mu b^2}{4\pi}\int \frac{dr}{r},$$

логарифмически расходящимся на обоих пределах. В качестве нижнего предела следует взять величину порядка атомных расстояний ($\sim b$), на которых деформация велика и макроскопическая теория неприменима. Верхний же предел определяется размерами порядка длины L дислокации. Тогда

$$F = \frac{\mu b^2}{4\pi}\ln\frac{L}{b}.$$

Энергию же деформации в «сердцевине» дислокации вблизи ее оси (в области с площадью сечения $\sim b^2$) можно оценить как $\sim \mu b^2$. При $\ln(L/b) \gg 1$ эта энергия мала по сравнению с энергией поля упругой деформации [2]).

3. Определить внутренние напряжения в анизотропной среде вокруг винтовой дислокации, перпендикулярной плоскости симметрии кристалла.

Решение. Выбираем систему координат x, y, z так, чтобы ось z совпадала с линией дислокации (и снова пишем $b_z = b$). Вектор $\mathbf{u}$ опять имеет лишь компоненту $u_z = u(x, y)$. Так как плоскость xy является плоскостью симметрии, то равны нулю все компоненты тензора λ_{iklm}, у которых индекс z встречается нечетное число раз. Поэтому отличны от нуля только две компоненты тензора σ_{ik}:

$$\sigma_{xz} = \lambda_{xzxz}\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_{xzyz}\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \sigma_{yz} = \lambda_{yzxz}\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_{yzyz}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Введем двухмерные вектор $\boldsymbol{\sigma}$ и тензор $\lambda_{\alpha\beta}$: $\sigma_\alpha = \sigma_{\alpha z}$, $\lambda_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha z\beta z}$ ($\alpha = 1, 2$). Тогда

$$\sigma_\alpha = \lambda_{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta},$$

а уравнение равновесия записывается в виде $\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} = 0$. Искомое решение этого уравнения должно удовлетворять условию (27.1): $\oint \nabla u\, d\mathbf{l} = b$.

---

[1]) Во всех задачах о прямолинейных дислокациях принимаем вектор $\boldsymbol{\tau}$ в отрицательном направлении оси z.

[2]) Эти оценки имеют общий характер и справедливы по порядку величины для любой (не только винтовой) дислокации. Следует отметить, что фактически значения $\ln(L/b)$ обычно не столь велики, так что энергия «сердцевины» составляет заметную часть полной энергии дислокации.

В таком виде задача совпадает с задачей о нахождении индукции и напряженности магнитного поля (роль которого играют $\boldsymbol{\sigma}$ и ∇u) в анизотропной среде (с магнитной проницаемостью $\lambda_{\alpha\beta}$) вокруг прямолинейного тока, сила которого $I = cb/4\pi$. Воспользовавшись известным из электродинамики решением этой задачи, найдем

$$\sigma_{\alpha z} = -\frac{b}{2\pi}\frac{\lambda_{\alpha\beta}e_{\beta\gamma z}x_\gamma}{\sqrt{|\lambda|}\lambda^{-1}_{\alpha'\beta'}x_{\alpha'}x_{\beta'}},$$

где $|\lambda|$ — определитель тензора $\lambda_{\alpha\beta}$ (см. VIII, задача 5 к § 30).

4. Определить деформацию вокруг прямолинейной краевой дислокации в изотропной среде.

Решение. Пусть ось z направлена вдоль линии дислокации, а вектор Бюргерса: $b_x = b$, $b_y = b_z = 0$. Из симметрии задачи очевидно, что вектор деформации лежит в плоскости xy и не зависит от z, так что мы имеем дело с плоской задачей. Ниже в этой задаче все векторы и векторные операции — двумерные в плоскости xy.

Будем искать решение уравнения

$$\Delta\mathbf{u} + \frac{1}{1-2\sigma}\nabla\operatorname{div}\mathbf{u} = -b\mathbf{j}\delta(\mathbf{r})$$

(см. задачу 1; $\mathbf{j}$ — единичный вектор вдоль оси y) в виде $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{w}$, где $\mathbf{u}^{(0)}$ — вектор с составляющими

$$u_x^{(0)} = \frac{b}{2\pi}\varphi, \quad u_y^{(0)} = \frac{b}{2\pi}\ln r$$

(мнимая и вещественная части от $\dfrac{b}{2\pi}\ln(x+iy)$); r, φ — полярные координаты в плоскости xy. Этот вектор удовлетворяет условию (27.1). Поэтому задача сводится к нахождению однозначной функции $\mathbf{w}$. Поскольку, как легко убедиться,

$$\operatorname{div}\mathbf{u}^{(0)} = 0, \quad \Delta\mathbf{u}^{(0)} = b\mathbf{j}\delta(\mathbf{r}),$$

то $\mathbf{w}$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\mathbf{w} + \frac{1}{1-2\sigma}\nabla\operatorname{div}\mathbf{w} = -2b\mathbf{j}\delta(\mathbf{r}).$$

Это — уравнение равновесия под действием сил, сосредоточенных вдоль оси z с объемной плотностью

$$\frac{Eb\mathbf{j}}{1+\sigma}\delta(\mathbf{r})$$

(ср. уравнение (1) в задаче к § 8). С помощью найденного в той же задаче тензора Грина для неограниченной среды нахождение $\mathbf{w}$ сводится к вычислению интеграла

$$\mathbf{w} = \frac{b}{8\pi(1-\sigma)}2\int\limits_0^\infty\left[\frac{(3-4\sigma)\mathbf{j}}{R} + \frac{\mathbf{r}y}{R^3}\right]dz', \quad R = \sqrt{r^2+z'^2}.$$

В результате получим

$$u_x = \frac{b}{2\pi}\left\{\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{1}{2(1-\sigma)}\frac{xy}{x^2+y^2}\right\},$$

$$u_y = -\frac{b}{2\pi}\left\{\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}\ln\sqrt{x^2+y^2} + \frac{1}{2(1-\sigma)}\frac{x^2}{x^2+y^2}\right\}.$$

Вычисленный отсюда тензор напряжений имеет декартовы компоненты

$$\sigma_{xx} = -bB\,\frac{y(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}, \quad \sigma_{yy} = bB\,\frac{y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, \quad \sigma_{xy} = bB\,\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

или полярные

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = -bB\,\frac{\sin\varphi}{r}, \quad \sigma_{r\varphi} = bB\,\frac{\cos\varphi}{r},$$

где $B = \dfrac{\mu}{2\pi(1-\sigma)}$.

5. Бесконечное число одинаковых параллельных прямолинейных краевых дислокаций в изотропной среде расположены в одной плоскости, перпендикулярной их векторам Бюргерса, на одинаковых расстояниях h друг от друга. Найти напряжения сдвига, создаваемые такой «дислокационной стенкой» на расстояниях, больших по сравнению с h.

Решение. Пусть дислокации параллельны оси z и расположены в плоскости yz. Согласно результатам задачи 4 суммарное напряжение, создаваемое всеми дислокациями в точке x, y, дается суммой

$$\sigma_{xy}(x,y) = bBx\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{x^2-(y-nh)^2}{[x^2+(y-nh)^2]^2}.$$

Перепишем эту сумму в виде

$$\sigma_{xy} = -bB\frac{\alpha}{h}\left[J(\alpha,\,\beta)+\alpha\frac{\partial J(\alpha,\,\beta)}{\partial\alpha}\right],$$

где

$$J(\alpha,\,\beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2+(\beta-n)^2}, \quad \alpha = \frac{x}{h}, \quad \beta = \frac{y}{h}.$$

Согласно формуле суммирования Пуассона

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{2\pi ikx}\,dx,$$

найдем

$$J(\alpha,\,\beta) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{\alpha^2+\xi^2} + 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{\infty}e^{2\pi ik\beta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi ik\xi}\,d\xi}{\alpha^2+\xi^2} =$$

$$= \frac{\pi}{\alpha}+\frac{2\pi}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-2\pi k\alpha}\cos(2\pi k\beta).$$

При $\alpha = x/h \gg 1$ в сумме по k можно оставить лишь первый член, и в результате получим

$$\sigma_{xy} = 4\pi^2B\frac{bx}{h^2}e^{-2\pi x/h}\cos\left(2\pi\frac{y}{h}\right).$$

Таким образом, напряжения убывают при удалении от стенки по экспоненциальному закону.

6. Определить деформацию изотропной среды вокруг дислокационной петли (*J. M. Burgers*, 1939).

Решение. Исходим из формулы (27.10). Тензор λ_{iklm} для изотропной среды согласно (5.9) и (5.11) может быть представлен в виде

$$\lambda_{iklm} = \mu\left\{\frac{2\sigma}{1-2\sigma}\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}\right\}.$$

Тензор Грина для изотропной среды найден в задаче к § 8 и может быть представлен как

$$G_{ik}(\mathbf{R}) = \frac{1}{16\pi\mu\,(1-\sigma)\,R}\{(3-4\sigma)\delta_{ik} + \nu_i\nu_k\}.$$

Здесь $\mathbf{R} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ — радиус-вектор от элемента $d\mathbf{f}'$ (в точке $\mathbf{r}'$) к точке наблюдения деформации (точка $\mathbf{r}$); $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{R}/R$ — единичный вектор в этом направлении. Подставив эти выражения в (27.10) и произведя под интегралом требуемые дифференцирования, получим после вычисления

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{1-2\sigma}{8\pi(1-\sigma)}\int\limits_{S_D}\frac{1}{R^2}\{\mathbf{b}(\boldsymbol{\nu}\,d\mathbf{f}') + (\mathbf{b}\boldsymbol{\nu})\,d\mathbf{f}' - \boldsymbol{\nu}(\mathbf{b}\,d\mathbf{f}')\} + \\ + \frac{3}{8\pi(1-\sigma)}\int\limits_{S_D}\frac{1}{R^2}\boldsymbol{\nu}(\mathbf{b}\boldsymbol{\nu})\,(\boldsymbol{\nu}\,d\mathbf{f}'). \quad (1)$$

Стоящие здесь интегралы можно выразить через интегралы по контуру D — по петле дислокации. Для этого используем следующие формулы:

$$\oint\limits_D \frac{1}{R}[\mathbf{b}\,d\mathbf{l}'] = \int\limits_{S_D}\frac{1}{R^2}\{(\mathbf{b}\boldsymbol{\nu})\,d\mathbf{f}' - \boldsymbol{\nu}(\mathbf{b}\,d\mathbf{f}')\},$$

$$\oint\limits_D [\mathbf{b}\boldsymbol{\nu}]\,d\mathbf{l}' = -\int\limits_{S_D}\frac{1}{R}\{\mathbf{b}\,d\mathbf{f}' + (\mathbf{b}\boldsymbol{\nu})\,(\boldsymbol{\nu}\,d\mathbf{f}')\}.$$

Интегралы в правых частях равенств получаются из контурных интегралов в левой части применением теоремы Стокса, согласно которой преобразование осуществляется заменой $d\mathbf{l}' \to [d\mathbf{f}'\cdot\nabla']$ (где $\nabla' = \partial/\partial\mathbf{r}'$); поскольку подынтегральное выражение зависит только от разности $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, это преобразование эквивалентно замене $d\mathbf{l}' \to -[d\mathbf{f}'\cdot\nabla]$ (где $\nabla = \partial/\partial\mathbf{r}$). Введем также телесный угол Ω, под которым петля D видна из точки наблюдения, согласно определению

$$\Omega = \int\frac{1}{R^2}\boldsymbol{\nu}\,d\mathbf{f}'.$$

Тогда поле смещений представится в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{b}\frac{\Omega}{4\pi} + \frac{1}{4\pi}\oint\limits_D\frac{1}{R}[\mathbf{b}\,d\mathbf{l}'] + \frac{1}{8\pi(1-\sigma)}\nabla\oint\limits_D([\mathbf{b}\boldsymbol{\nu}]\,d\mathbf{l}').$$

Неоднозначность этой функции заключена в первом члене — угол Ω меняется на 4π при обходе вокруг линии D.

Вдали от петли выражение (1) сводится к

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{1-2\sigma}{8\pi\,(1-\sigma)\,R^2}\{\mathbf{S}\,(\mathbf{b}\boldsymbol{\nu}) + \mathbf{b}\,(\mathbf{S}\boldsymbol{\nu}) - \boldsymbol{\nu}\,(\mathbf{S}\mathbf{b})\} + \frac{3}{8\pi\,(1-\sigma)\,R^2}(\mathbf{S}\boldsymbol{\nu})\,(\mathbf{b}\boldsymbol{\nu})\,\boldsymbol{\nu}.$$

Эту формулу можно было бы получить и непосредственно из (27.11), (27.12).

§ 28. Действие поля напряжений на дислокацию

Рассмотрим дислокационную петлю D в поле упругих напряжений $\sigma_{ik}^{(e)}$, созданных действующими на тело внешними нагрузками, и вычислим силу, действующую на нее в этом поле. Согласно общим правилам для этого надо найти работу δR_D, производимую над дислокацией при бесконечно малом ее смещении.

Вернемся к введенному в § 27 представлению о дислокационной петле D как линии, на которую опирается поверхность (S_D) разрыва вектора смещения; величина разрыва дается формулой (27.7). Смещение линии дислокации D приводит к изменению поверхности S_D. Пусть $\delta\mathbf{x}$ — вектор смещения точек линии D. Смещаясь на $\delta\mathbf{x}$, элемент $d\mathbf{l}$ длины линии описывает площадь $\delta\mathbf{f} = [\delta\mathbf{x}\cdot d\mathbf{l}] = [\delta\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\tau}]\,dl$, чем и определяется приращение площади поверхности S_D. Поскольку речь идет теперь о реальном, физическом смещении дислокации, необходимо учесть, что указанная операция сопровождается изменением физического объема среды. Поскольку смещения $\mathbf{u}$ точек среды по обе стороны поверхности различаются на величину $\mathbf{b}$, то это изменение дается произведением

$$\delta V = \mathbf{b}\,d\mathbf{f} = [\delta\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\tau}]\,\mathbf{b}\,df = \delta\mathbf{x}\,[\boldsymbol{\tau}\mathbf{b}]\,df. \qquad (28.1)$$

В связи с этим возможны две существенно различные физические ситуации. В одной из них $\delta V \equiv 0$, смещение линии дислокации не связано с изменением объема. Так будет, если смещение происходит в плоскости, определяемой векторами $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{b}$. Эту плоскость называют *плоскостью скольжения* данного элемента дислокации. Огибающую семейства плоскостей скольжения всех элементов длины петли D называют *поверхностью скольжения* дислокации; она представляет собой цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными вектору Бюргерса $\mathbf{b}$ [1]). Физическая особенность плоскости скольжения состоит в том, что только в ней возможно сравнительно легкое механическое перемещение дислокации (о котором в этом случае обычно говорят как о ее *скольжении*) [2]).

С изменением площади поверхности S_D при смещении дислокации связано изменение сингулярной деформации (27.8), со-

[1]) Возможные системы плоскостей скольжения в анизотропной среде фактически определяются структурой ее кристаллической решетки.

[2]) Так, для передвижения изображенной на рис. 22 краевой дислокации в ее плоскости скольжения (плоскость xz) достаточно сравнительно небольших перемещений атомов, в результате которых «лишними» будут оказываться все более удаленные от плоскости yz кристаллические полуплоскости.

средоточенное на линии D. Его можно представить в виде

$$\delta u_{ik}^{(\text{пл})} = \frac{1}{2}\{b_i[\delta\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\tau}]_k + b_k[\delta\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\tau}]_i\}\delta(\boldsymbol{\xi}), \tag{28.2}$$

где $\delta(\boldsymbol{\xi})$ — введенная в § 27 двумерная δ-функция. Подчеркнем, что эта деформация однозначно определяется формой линии D и смещением $\delta\mathbf{x}$, в отличие от выражения (27.8), зависящего от произвольного выбора поверхности S_D.

Выражение (28.2) описывает локальную неупругую остаточную деформацию (ее называют *пластической*), не сопровождающуюся упругими напряжениями. Связанная с ней работа, совершаемая в конечном счете внешними источниками, дается интегралом

$$\int \sigma_{ik}^{(e)}\,\delta u_{ik}\,dV$$

(ср. (3.2)), где под δu_{ik} надо понимать полное геометрическое изменение деформации. Оно складывается из упругой и пластической частей; нас интересует здесь только работа, связанная с пластической частью [1]). После подстановки $\delta u_{ik}^{(\text{пл})}$ из (28.2), ввиду наличия в нем δ-функции, остается интегрирование только вдоль длины дислокационной петли D:

$$\delta R_D = \oint\limits_D \sigma_{ik}^{(e)} e_{ilm}\,\delta x_l \tau_m\,dl. \tag{28.3}$$

Коэффициент при δx_l в подынтегральном выражении есть сила f_l, действующая на единицу длины линии дислокации. Таким образом,

$$f_i = e_{ikl}\tau_k\sigma_{lm}^{(e)}b_m \tag{28.4}$$

(*M.O. Peach*, *J.S. Köhler*, 1950). Отметим, что сила $\mathbf{f}$ перпендикулярна вектору $\boldsymbol{\tau}$, т. е. линии дислокации.

Формула (28.3) допускает наглядную интерпретацию. Согласно сказанному выше смещение элемента линии дислокации сводится к разрезанию некоторой площадки $d\mathbf{f}$ и сдвигу верхнего берега разреза относительно нижнего на длину $\mathbf{b}$. Приложенная к $d\mathbf{f}$ сила внутренних напряжений есть $\sigma_{ik}^{(e)}\,df_k$, а производимая этой силой при сдвиге работа есть $b_i\sigma_{ik}^{(e)}\,df_k$.

Поскольку в написанном виде формула (28.4) относится только к перемещению в плоскости скольжения, имеет смысл сразу

[1]) При выводе уравнений движения виртуальные пластическую и упругую деформации надо рассматривать как независимые переменные. Интересуясь уравнением движения дислокации, надо рассматривать только пластическую деформацию.

же написать проекцию силы $\mathbf{f}$ на эту плоскость. Пусть $\varkappa$ — единичный вектор нормали к линии дислокации в плоскости скольжения. Тогда

$$f_\perp = \mathbf{f}\varkappa = e_{ikl}\varkappa_i\tau_k b_m \sigma_{lm}^{(e)}$$

или

$$f_\perp = \nu_l \sigma_{lm}^{(e)} b_m, \tag{28.5}$$

где $\boldsymbol{\nu} = [\boldsymbol{\varkappa\tau}]$ — вектор нормали к плоскости скольжения. Поскольку векторы $\mathbf{b}$ и $\boldsymbol{\nu}$ взаимно перпендикулярны, то (выбрав вдоль них две из координатных осей) мы видим, что сила $f_\perp$ определяется всего одной из компонент тензора $\sigma_{lm}^{(e)}$.

Если же смещение дислокации происходит не в плоскости скольжения, то $\delta V \neq 0$. Это значит, что смещение берегов разреза привело бы к появлению избытка вещества (когда один берег «перехлестывает» другой) или к его недостаче (образование щели между раздвигающимися берегами). Этого нельзя допустить, если полагать, что в процессе движения дислокации сплошность среды не нарушается и ее плотность остается неизменной (с точностью до упругих деформаций). Устранение избыточного вещества или заполнение его нехватки происходит в реальном кристалле диффузионным способом (ось дислокации становится источником или стоком диффузионных потоков вещества) [1]). О перемещении дислокации, сопровождающемся диффузионным «залечиванием» дефектов сплошной среды, говорят как о ее *переползании* [2]).

Из сказанного ясно, что, допустив переползание дислокации в качестве возможного ее виртуального перемещения, необходимо считать, что оно, как и скольжение, происходит без локального изменения объема среды. Это значит, что из деформации (28.2) надо вычесть ответственную за изменение объема часть $\frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}^{(\text{пл})}$, т. е. описывать пластическую деформацию тензором

$$\delta u_{ik}^{(\text{пл})} = \left\{\frac{1}{2}b_i[\delta\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\tau}]_k + \frac{1}{2}b_k[\delta\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\tau}]_i - \frac{1}{3}\delta_{ik}\mathbf{b}[\delta\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\tau}]\right\}\delta(\boldsymbol{\xi}). \tag{28.6}$$

Соответственно вместо (28.4) получим следующую формулу для

---

[1]) Так, изображенная на рис. 22 дислокация может перемещаться в плоскости yz лишь за счет диффузионного ухода вещества из «лишней» полуплоскости.

[2]) Поскольку такой процесс лимитируется диффузией, он может фактически играть роль лишь при достаточно высоких температурах.

действующей на дислокацию силы [1]):

$$f_i = e_{ikl}\tau_k b_m \left(\sigma^{(e)}_{lm} - \frac{1}{3}\delta_{lm}\sigma^{(e)}_{nn}\right) \tag{28.7}$$

(*J. Weertman*, 1965). Полная сила, действующая на всю дислокационную петлю, равна

$$F_i = e_{ikl}b_m \oint\limits_D \left(\sigma^{(e)}_{lm} - \frac{1}{3}\delta_{lm}\sigma^{(e)}_{nn}\right) dx_k. \tag{28.8}$$

Она отлична от нуля только в неоднородном поле напряжений (при $\sigma^{(e)}_{lm} = \text{const}$ интеграл сводится к $\oint dx_k \equiv 0$). Если на протяжении петли поле напряжений меняется мало, то

$$F_i = e_{ikl}b_m \frac{\partial}{\partial x_p}\left(\sigma^{(e)}_{ml} - \frac{1}{3}\delta_{lm}\sigma^{(e)}_{nn}\right) \oint{}_D x_p\, dx_k$$

(петлю представляем себе расположенной вблизи начала координат). Входящие сюда интегралы образуют антисимметричный тензор

$$\oint x_p\, dx_k = -\oint x_k\, dx_p.$$

Имея это в виду, легко выразить силу через введенный в (27.12) дислокационный момент d_{kl} [2]):

$$F_i = d_{lm}\frac{\partial \sigma^{(e)}_{lm}}{\partial x_i} + \frac{1}{3}\left(d_{il}\frac{\partial \sigma^{(e)}_{nn}}{\partial x_l} - d_{ll}\frac{\partial \sigma^{(e)}_{nn}}{\partial x_i}\right). \tag{28.9}$$

В однородном поле напряжений эта сила, как уже было указано, обращается в нуль. При этом, однако, на петлю действует момент сил

$$K_i = e_{ilm}\oint x_l f_m\, dl,$$

который тоже можно выразить через дислокационный момент:

$$K_i = e_{ikl}d_{km}\left(\sigma^{(e)}_{lm} - \frac{1}{3}\delta_{lm}\sigma^{(e)}_{nn}\right). \tag{28.10}$$

---

[1]) Представляется очевидным, что всестороннее (равномерное) сжатие кристалла не должно приводить к появлению силы **f**; выражение (28.7) этим свойством обладает.

[2]) При выводе используется также формула $e_{ikl}e_{imn} = \delta_{km}\delta_{ln} - \delta_{kn}\delta_{lm}$ и уравнения равновесия $\partial\sigma^{(e)}_{lm}/\partial x_m = 0$.

Задачи

1. Найти силу взаимодействия двух параллельных винтовых дислокаций в изотропной среде.

Решение. Сила, действующая на единицу длины одной дислокации в поле напряжений, создаваемых второй дислокацией, определяется по формуле (28.4) с помощью результатов задачи 2 § 27. Она имеет радиальное направление и равна

$$f = \frac{\mu b_1 b_2}{2\pi r}.$$

Дислокации одного знака ($b_1 b_2 > 0$) отталкиваются, а дислокации разных знаков ($b_1 b_2 < 0$) притягиваются.

2. Прямолинейная винтовая дислокация расположена параллельно плоской свободной поверхности изотропной среды. Найти действующую на дислокацию силу.

Решение. Пусть плоскость yz совпадает с поверхностью тела, а дислокация параллельна оси z и имеет координаты $x = x_0$, $y = 0$.

Поле напряжений, оставляющее поверхность среды свободной, описывается суммой полей дислокации и ее зеркального отражения в плоскости yz, как если бы они были расположены в неограниченной среде:

$$\sigma_{xz} = -\frac{\mu b}{2\pi}\left[\frac{y}{(x-x_0)^2+y^2} - \frac{y}{(x+x_0)^2+y^2}\right],$$
$$\sigma_{yz} = \frac{\mu b}{2\pi}\left[\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+y^2} - \frac{x+x_0}{(x+x_0)^2+y^2}\right].$$

Такое поле действует на рассматриваемую дислокацию с силой, равной притяжению со стороны ее зеркального изображения, т. е. дислокация притягивается к поверхности среды с силой

$$f = \frac{\mu b^2}{4\pi x_0}.$$

3. Найти силу взаимодействия двух параллельных краевых дислокаций в изотропной среде, расположенных в параллельных плоскостях скольжения.

Решение. Пусть плоскости скольжения параллельны плоскостям xz, а ось z параллельна линиям дислокаций; как и в задаче 4 § 27, полагаем $\tau_z = -1$, $b_x = b$. Тогда сила, действующая на единицу длины дислокации в поле упругих напряжений σ_{ik}, имеет компоненты

$$f_x = b\sigma_{xy}, \quad f_y = -b\sigma_{xx}.$$

В данном случае σ_{ik} определяются выражениями, найденными в задаче 4 § 27. Если одна дислокация совпадает с осью z, то она действует на вторую дислокацию, проходящую через точку x, y на плоскости xy, с силой, компоненты которой в полярных координатах равны

$$f_r = \frac{b_1 b_2 B}{r}, \quad f_\varphi = \frac{b_1 b_2 B}{r}\sin 2\varphi, \quad B = \frac{\mu}{2\pi(1-\sigma)}.$$

Проекция же силы на плоскость скольжения равна

$$f_x = b_1 b_2 B\frac{\cos\varphi\cos 2\varphi}{r}.$$

Она обращается в нуль при $\varphi = \pi/2$ и при $\varphi = \pi/4$. Первое из этих положений соответствует устойчивому равновесию при $b_1 b_2 > 0$, а второе — при $b_1 b_2 < 0$.

§ 29. Непрерывное распределение дислокаций

Если в кристалле имеется одновременно много дислокаций, находящихся на относительно малых (хотя, конечно, и больших по сравнению с постоянной решетки) расстояниях, то становится целесообразным их усредненное рассмотрение. Другими словами, рассматриваются «физически бесконечно малые» элементы объема кристалла, через которые проходит достаточно много дислокационных линий.

Формулировка уравнения, выражающего основное свойство дислокационных деформаций, достигается естественным обобщением уравнения (27.6). Введем тензор ρ_{ik} (*тензор плотности дислокаций*) такой, чтобы его интеграл по поверхности, опирающейся на любой контур L, был равен сумме $\mathbf{b}$ векторов Бюргерса всех дислокационных линий, охватываемых этим контуром:

$$\int_{S_L} \rho_{ik}\, df_i = b_k. \tag{29.1}$$

Непрерывные функции ρ_{ik} описывают распределение дислокаций в кристалле. Этот тензор заменяет собой теперь выражение в правой части уравнения (27.6):

$$e_{ilm}\frac{\partial w_{mk}}{\partial x_l} = -\rho_{ik}. \tag{29.2}$$

Как видно из этого уравнения, тензор ρ_{ik} должен удовлетворять условию

$$\frac{\partial \rho_{ik}}{\partial x_i} = 0 \tag{29.3}$$

(в случае одиночной дислокации это условие выражает собой просто постоянство вектора Бюргерса вдоль линии дислокации).

При таком рассмотрении дислокаций тензор w_{ik} становится первичной величиной, описывающей деформацию и определяющей тензор деформации согласно (27.4). Вектор же смещения $\mathbf{u}$, который был бы связан с w_{ik} определением (27.2), при этом вообще не может быть введен (это ясно уже из того, что при таком определении левая з´бвм уравнения (29.2) тождественно обратилась бы в нуль во всем объеме кристалла).

До сих пор мы предполагали дислокации неподвижными. Выясним теперь, каким образом должна быть сформулирована система уравнений, позволяющая в принципе определить упругие деформации и напряжения в среде, в которой дислокации совершают заданное движение[1]).

[1]) Мы не занимаемся здесь вопросом об определении самого движения дислокаций по приложенным к телу силам. Решение этого вопроса требует детального изучения микроскопического механизма движения дислокаций и их торможения на различных дефектах, которое должно производиться с учетом фактических данных о реальных кристаллах.

Уравнение (29.2) не зависит от того, покоятся или движутся дислокации. При этом тензор w_{ik} по-прежнему остается величиной, определяющей упругую деформацию; его симметричная часть есть тензор упругой деформации, связанный обычным образом законом Гука с тензором напряжений.

Это уравнение, однако, теперь недостаточно для полного формулирования задачи. Полная система уравнений должна определять также и скорость $\mathbf{v}$ перемещения точек среды.

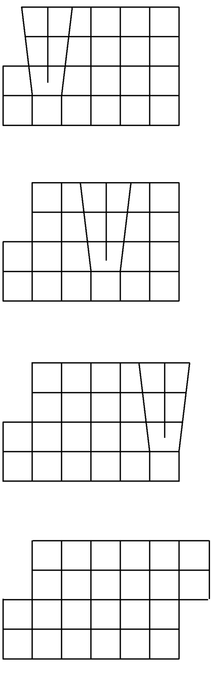


Рис. 25

Но при этом необходимо учесть, что движение дислокаций сопровождается, помимо изменения упругой деформации, также и изменением формы кристалла, не связанным с возникновением напряжений — *пластической деформацией*. Как уже упоминалось, движение дислокаций как раз и представляет собой механизм пластической деформации. (Связь движения дислокаций с пластической деформацией ясно демонстрируется рис. 25: в результате прохождения краевой дислокации слева направо верхняя — над плоскостью скольжения — часть кристалла оказывается сдвинутой на один период решетки; поскольку решетка в результате остается правильной, то кристалл остается ненапряженным.) В противоположность упругой деформации, однозначно связанной с термодинамическим состоянием тела, пластическая деформация является функцией процесса. При рассмотрении неподвижных дислокаций вопрос о разделении упругой и пластической деформаций не возникает: нас интересуют при этом лишь напряжения, не зависящие от предыдущей истории кристалла.

Пусть $\mathbf{u}$ — вектор геометрического смещения точек среды, отсчитываемый, скажем, от их положения перед началом процесса деформации; его производная по времени $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v}$. Если образовать с помощью вектора $\mathbf{u}$ тензор «полной дисторсии» $W_{ik} = \partial u_k/\partial x_i$, то мы получим его «пластическую часть» $w_{ik}^{(\text{пл})}$, вычтя из W_{ik} тензор «упругой дисторсии», совпадающий с фигурирующим в (29.2) тензором w_{ik}. Введем обозначение

$$-j_{ik} = \frac{\partial w_{ik}^{(\text{пл})}}{\partial t}; \tag{29.4}$$

симметричная часть j_{ik} определяет скорость изменения тензора пластической деформации: изменение $u_{ik}^{(\text{пл})}$ за бесконечно малое

время δt равно

$$\delta u_{ik}^{(\text{пл})} = -\frac{1}{2}(j_{ik} + j_{ki})\delta t \tag{29.5}$$

(*E. Kröner*, *G. Rieder*, 1956). Отметим, в частности, что если пластическая деформация происходит без нарушения сплошности тела, то след тензора j_{ik} равен нулю. Действительно, пластическая деформация не приводит к растяжению или сжатию тела (которые всегда связаны с возникновением внутренних напряжений), т. е. $u_{kk}^{(\text{пл})} = 0$, а потому и $j_{kk} = -\partial u_{kk}^{(\text{пл})}/\partial t = 0$.

Подставив в определение (29.4) $w_{ik}^{(\text{пл})} = W_{ik} - w_{ik}$, запишем его в виде уравнения

$$\frac{\partial w_{ik}}{\partial t} = \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + j_{ik}, \tag{29.6}$$

связывающего скорости изменения упругой и пластической деформаций. Здесь j_{ik} надо рассматривать как заданные величины, которые должны удовлетворять условиям, обеспечивающим совместность уравнений (29.6) и (29.2). Эти условия получаются дифференцированием (29.2) по времени и подстановкой в него (29.6); они имеют вид уравнения

$$\frac{\partial \rho_{ik}}{\partial t} + e_{ilm}\frac{\partial j_{mk}}{\partial x_l} = 0. \tag{29.7}$$

Уравнения (29.2), (29.6) вместе с динамическими уравнениями

$$\rho \dot{v}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \quad \sigma_{ik} = \lambda_{iklm} u_{lm} = \lambda_{iklm} w_{lm}, \tag{29.8}$$

составляют полную систему уравнений, описывающих динамику упругой среды с движущимися дислокациями (*А.М. Косевич*, 1962). Фигурирующие в этих уравнениях тензоры ρ_{ik} и j_{ik} являются заданными функциями координат (и времени), характеризующими распределение и движение дислокаций. Эти функции должны удовлетворять условиям совместности уравнений (29.2) друг с другом и с уравнением (29.6), выражаемым равенствами (29.3) и (29.7).

Условие (29.7) можно рассматривать как дифференциальное выражение «закона сохранения вектора Бюргерса» в среде. Действительно, проинтегрировав обе части уравнения (29.7) по поверхности, опирающейся на некоторую замкнутую линию L, введя согласно (29.1) полный вектор Бюргерса $\mathbf{b}$ охваченных линией L дислокаций и воспользовавшись теоремой Стокса, получим

$$\frac{db_k}{dt} = -\oint_L j_{ik}\, dx_i. \tag{29.9}$$

Из вида этого равенства очевидно, что интеграл в его правой части определяет величину вектора Бюргерса, «протекающего»

в единицу времени через контур L, т. е. уносимого дислокациями, пересекающими линию L. Поэтому естественно назвать j_{ik} тензором *плотности потока дислокации.*

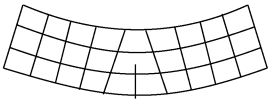


Рис. 26

Ясно, в частности, что в случае отдельной дислокационной петли тензор j_{ik} имеет вид

$$j_{ik} = e_{ilm}\rho_{lk}V_m = e_{ilm}\tau_l V_m b_k \delta(\boldsymbol{\xi}) \quad (29.10)$$

в соответствии с выражением (28.2) для пластической деформации при смещении дислокации; здесь $\mathbf{V}$ — скорость линии дислокации в данной ее точке. При этом вектор потока через элемент $d\mathbf{l}$ контура L $(j_{ik}dl_i)$ пропорционален $d\mathbf{l}\,[\boldsymbol{\tau}\mathbf{V}] = \mathbf{V}\,[d\mathbf{l}\boldsymbol{\tau}]$, т. е. проекции скорости $\mathbf{V}$ на направление, перпендикулярное как $d\mathbf{l}$, так и $\boldsymbol{\tau}$; из геометрических соображений очевидно, что так и должно было быть — только эта проекция скорости приводит к пересечению дислокацией элемента $d\mathbf{l}$.

Отметим, что след тензора (29.10) пропорционален проекции скорости дислокации на нормаль к ее плоскости скольжения. Выше было указано, что отсутствие неупругого изменения плотности среды обеспечивается условием $j_{ii} = 0$. Мы видим, что для отдельной дислокации это условие означает движение в плоскости скольжения в соответствии со сказанным выше о физической природе движения дислокаций (см. примеч. [0]) на с. 168).

Наконец, остановимся на случае, когда дислокационные петли в кристалле распределены таким образом, что их суммарный вектор Бюргерса (обозначим его через $\mathbf{B}$) равен нулю [1]). Это условие означает, что при интегрировании по любому поперечному сечению тела

$$\int \rho_{ik}\, df_i = 0. \quad (29.11)$$

Отсюда следует, что плотность дислокации в этом случае может быть представлена в виде

$$\rho_{ik} = e_{ilm}\frac{\partial P_{mk}}{\partial x_l} \quad (29.12)$$

(*F. Kroupa*, 1962); тогда интеграл (29.11) преобразуется в интеграл по контуру, проходящему вне тела и обращается в нуль. Отметим также, что выражение (29.12) автоматически удовлетворяет условию (29.3).

Легко видеть, что определенный таким образом тензор P_{ik} представляет собой плотность дислокационного момента в деформированном кристалле (его естественно назвать поэтому

[1]) Наличие дислокации связано с некоторым изгибом кристалла, как это схематически изображено в утрированном виде на рис. 26. Условие $\mathbf{B} = 0$ означает отсутствие макроскопического изгиба кристалла в целом.

дислокационной поляризацией). Действительно, полный дислокационный момент кристалла D_{ik} равен по определению

$$D_{ik} = \sum S_i b_k = \frac{1}{2} e_{ilm} \sum b_k \oint\limits_D x_l \, dx_m = \frac{1}{2} \int e_{ilm} x_l \rho_{mk} \, dV,$$

где суммирование производится по всем дислокационным петлям, а интегрирование — по всему объему кристалла. Подставив сюда (29.12), имеем

$$D_{ik} = \frac{1}{2} \int e_{ilm} e_{mpq} x_l \frac{\partial P_{qk}}{\partial x_p} \, dV = \frac{1}{2} \int x_m \left(\frac{\partial P_{mk}}{\partial x_i} - \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_m} \right) dV$$

и после интегрирования по частям в каждом из двух членов

$$D_{ik} = \int P_{ik} \, dV. \tag{29.13}$$

Плотность же потока дислокаций выражается через тот же тензор P_{ik} согласно

$$j_{ik} = -\frac{\partial P_{ik}}{\partial t}. \tag{29.14}$$

В этом легко убедиться, например, вычислив интеграл $\int j_{ik} \, dV$ по произвольной части объема тела с помощью выражения (29.10) как сумму по всем заключенным в этом объеме дислокационным петлям. Отметим, что выражение (29.14) вместе с (29.12) автоматически удовлетворяют условию (29.7).

Сравнив (29.14) и (29.4), мы видим, что $\delta w_{ik}^{(\text{пл})} = \delta P_{ik}$. Если условиться считать пластическую деформацию отсутствующей в состоянии с $P_{ik} = 0$, то будет и $w_{ik}^{(\text{пл})} = P_{ik}$. Подразумевается, что весь процесс деформации происходит при $\mathbf{B} = 0$. Это обстоятельство надо подчеркнуть, поскольку между тензорами P_{ik} и $w_{ik}^{(\text{пл})}$ существует принципиальное различие: в то время как P_{ik} является функцией состояния тела, тензор $w_{ik}^{(\text{пл})}$ не есть функция состояния, а зависит от процесса, приведшего тело в данное состояние. В этих условиях имеем

$$w_{ik} = W_{ik} - w_{ik}^{(\text{пл})} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - P_{ik}, \tag{29.15}$$

где снова u_k — вектор полного геометрического смещения от положения в недеформированном состоянии. Уравнение (29.6) при этом удовлетворяется тождественно, а динамическое уравнение (29.8) принимает вид

$$\rho \ddot{u}_i - \lambda_{iklm} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \, \partial x_l} = -\lambda_{iklm} \frac{\partial P_{lm}}{\partial x_k}. \tag{29.16}$$

Таким образом, определение упругой деформации, созданной движущимися дислокациями с $\mathbf{B} = 0$, сводится к задаче обычной теории упругости с объемными силами, распределенными по кристаллу с плотностью $-\lambda_{iklm}\partial P_{lm}/\partial x_k$.

§ 30. Распределение взаимодействующих дислокаций

Рассмотрим совокупность большого числа одинаковых прямолинейных дислокаций, расположенных параллельно друг другу в одной и той же плоскости скольжения, и выведем уравнение, определяющее их равновесное распределение. Пусть ось z параллельна дислокациям, а плоскость xz совпадает с плоскостью скольжения.

Будем для определенности считать, что векторы Бюргерса дислокаций направлены вдоль оси x. Тогда сила, действующая в плоскости скольжения на единицу длины дислокации, равна $b\sigma_{xy}$, где σ_{xy} — напряжение в точке нахождения дислокации.

Напряжения, создаваемые одной прямолинейной дислокацией (и действующие на другую дислокацию), убывают обратно пропорционально расстоянию от нее. Поэтому напряжение, создаваемое в точке x дислокацией, находящейся в точке x', имеет вид $bD/(x - x')$, где D — постоянная порядка величины упругих модулей кристалла. Можно показать, что эта постоянная $D > 0$, т. е. две одинаковые дислокации в одной и той же плоскости скольжения отталкиваются друг от друга (для изотропной среды это показано в задаче 3 § 28).

Обозначим через $\rho(x)$ линейную плотность дислокаций, распределенных на отрезке (a_1, a_2) оси x; $\rho(x)\,dx$ есть сумма векторов Бюргерса дислокаций, проходящих через точки интервала dx. Тогда полное напряжение, создаваемое в точке x оси x всеми дислокациями, запишется в виде интеграла

$$\sigma_{xy} = -D\int\limits_{a_1}^{a_2} \frac{\rho(\xi)\,d\xi}{\xi - x}. \tag{30.1}$$

Для точек внутри самого отрезка (a_1, a_2) этот интеграл должен пониматься в смысле главного значения для того, чтобы исключить физически бессмысленное действие дислокации самой на себя.

Если в кристалле имеется также и плоское (в плоскости xy) поле напряжений $\sigma_{xy}^{(e)}(x, y)$, созданное заданными внешними нагрузками, то каждая дислокация будет находиться под действием силы $b\,(\sigma_{xy} + p(x))$, где мы обозначили для краткости $p(x) = \sigma_{xy}^{(e)}(x, 0)$. Условие равновесия заключается в обращении этой

силы в нуль: $\sigma_{xy} + p = 0$, т. е.

$$\fint_{a_1}^{a_2} \frac{\rho(\xi)\,d\xi}{\xi - x} = \frac{p(x)}{D} \equiv \omega(x), \tag{30.2}$$

где главное значение обозначено, как это принято, перечеркнутым знаком интеграла. Это — интегральное уравнение для определения равновесного распределения $\rho(x)$. Оно относится к типу сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши.

Решение такого уравнения сводится к задаче теории функций комплексного переменного, формулируемой следующим образом.

Обозначим через $\Omega(z)$ функцию, определенную во всей плоскости комплексного z (с разрезом по отрезку (a_1, a_2)), как интеграл

$$\Omega(z) = \int_{a_1}^{a_2} \frac{\rho(\xi)\,d\xi}{\xi - z}. \tag{30.3}$$

Предельные значения этой функции на верхнем и нижнем берегах разреза обозначим через $\Omega^+(x)$ и $\Omega^-(x)$. Они равны таким же интегралам, взятым по отрезку (a_1, a_2) с обходом точки $z = x$ соответственно снизу или сверху по бесконечно малой полуокружности, т. е.

$$\Omega^{\pm}(x) = \fint_{a_1}^{a_2} \frac{\rho(\xi)\,d\xi}{\xi - x} \pm i\pi\rho(x). \tag{30.4}$$

Если $\rho(\xi)$ удовлетворяет уравнению (30.2), то главное значение интеграла равно $\omega(x)$, так что имеем

$$\Omega^+(x) + \Omega^-(x) = 2\omega(x), \tag{30.5}$$

$$\Omega^+(x) - \Omega^-(x) = 2\,i\pi\rho(x). \tag{30.6}$$

Таким образом, задача о решении уравнения (30.2) эквивалентна задаче об отыскании аналитической функции $\Omega(z)$ со свойством (30.5), после чего $\rho(x)$ определяется по (30.6). При этом физические условия рассматриваемой задачи требуют также, чтобы $\Omega(\infty) = 0$; это следуют из того, что вдали от системы дислокаций ($x \to \pm\infty$) напряжения σ_{xy} должны обращаться в нуль (по определению (30.3), вне отрезка (a_1, a_2): $\sigma_{xy}(x) = -D\Omega(x)$).

Рассмотрим сначала случай, когда внешние напряжения отсутствуют ($p(x) \equiv 0$), а дислокации сдерживаются какими-либо препятствиями (дефектами решетки) на концах отрезка (a_1, a_2).

При $\omega(x) = 0$ имеем из (30.5): $\Omega^+(x) = -\Omega^-(x)$, т. е. функция $\Omega(z)$ должна менять знак при обходе каждой из двух точек a_1, a_2. Этому условию удовлетворяет любая функция вида

$$\Omega(z) = \frac{P(z)}{\sqrt{(a_2 - z)(z - a_1)}}, \tag{30.7}$$

где $P(z)$ — полином. Условие же $\Omega(\infty) = 0$ фиксирует (с точностью до постоянного коэффициента) выбор $P(z) = 1$, так что

$$\Omega(z) = \frac{1}{\sqrt{(a_2 - z)(z - a_1)}}. \tag{30.8}$$

Такой же вид будет иметь, согласно (30.6), и искомая функция $\rho(x)$. Определив коэффициент в ней согласно условию

$$\int_{a_1}^{a_2} \rho(\xi)\, d\xi = B \tag{30.9}$$

(B — сумма векторов Бюргерса всех дислокаций), получим

$$\rho(x) = \frac{B}{\pi\sqrt{(a_2 - x)(x - a_1)}}. \tag{30.10}$$

Мы видим, что дислокации скапливаются по направлению к препятствиям (границам отрезка) с плотностью, обратно пропорциональной корню из расстояний до них. По такому же закону возрастают при приближении к a_1 или a_2 напряжения вне отрезка (a_1, a_2); так, при $x > a_2$

$$\sigma_{xy} \approx \frac{BD}{\sqrt{(x - a_2)(a_2 - a_1)}}.$$

Другими словами, концентрация дислокаций у границы приводит к такой же концентрации напряжений по другую сторону границы.

Предположим теперь, что в тех же условиях (препятствия в заданных концах отрезка) имеется также и внешнее поле напряжений $p(x)$. Обозначим через $\Omega_0(z)$ функцию вида (30.7) и перепишем равенство (30.5) (разделив его на $\Omega_0^+ = -\Omega_0^-$) в виде

$$\frac{\Omega^+(x)}{\Omega_0^+(x)} - \frac{\Omega^-(x)}{\Omega_0^-(x)} = \frac{2\omega(x)}{\Omega_0^+(x)}.$$

Сравнив это равенство с (30.6), делаем вывод, что

$$\frac{\Omega(z)}{\Omega_0(z)} = \frac{1}{i\pi} \int_{a_1}^{a_2} \frac{\omega(\xi)}{\Omega_0^+(\xi)} \frac{d\xi}{\xi - z} + i\pi P(z), \tag{30.11}$$

где $P(z)$ — полином. Решение, удовлетворяющее условию $\Omega(\infty) = 0$, получим, выбрав в качестве $\Omega_0(z)$ функцию (30.8) и положив $P(z) = C$ (C — константа). Искомая функция $\rho(x)$ находится отсюда по формуле (30.6) и равна

$$\rho(x) = -\frac{1}{\pi^2\sqrt{(a_2-x)(x-a_1)}} \fint_{a_1}^{a_2} \omega(\xi)\sqrt{(a_2-\xi)(\xi-a_1)}\frac{d\xi}{\xi-x} + \frac{C}{\sqrt{(a_2-x)(x-a_1)}}. \qquad (30.12)$$

Постоянная C определяется условием (30.9). И здесь $\rho(x)$ возрастает при $x \to a_2$ (или $x \to a_1$) по закону $(a_2 - x)^{-1/2}$, а по другую сторону препятствия возникает такая же концентрация напряжений.

Если препятствие имеется только с одной стороны (скажем, в точке a_2), то искомое решение должно удовлетворять условию конечности напряжений при всех $x < a_2$, включая точку $x = a_1$; при этом само положение последней точки заранее неизвестно и должно определиться в результате решения задачи. В терминах $\Omega(z)$ это значит, что $\Omega(a_1)$ должно быть конечным. Такая функция (удовлетворяющая также и условию $\Omega(\infty) = 0$) получится по той же формуле (30.11), если в качестве $\Omega_0(z)$ выбрать функцию

$$\Omega_0(z) = \sqrt{\frac{z-a_1}{a_2-z}},$$

тоже относящуюся к виду (30.7), и положить в (30.11) $P(z) = 0$. В результате получим

$$\rho(x) = -\frac{1}{\pi^2}\sqrt{\frac{x-a_1}{a_2-x}} \fint_{a_1}^{a_2} \sqrt{\frac{a_2-\xi}{\xi-a_1}}\,\frac{\omega(\xi)\,d\xi}{\xi-x}. \qquad (30.13)$$

При $x \to a_1$ $\rho(x)$ обращается в нуль как $\sqrt{x-a_1}$. По такому же закону стремится к нулю с другой стороны точки a_1 полное напряжение $\sigma_{xy}(x) + p(x)$.

Наконец, пусть препятствия отсутствуют в обоих концах отрезка и дислокации сдерживаются лишь внешними напряжениями $p(x)$. Соответствующее $\Omega(z)$ получим, положив в (30.11)

$$\Omega_0(z) = \sqrt{(a_2-z)(z-a_1)}, \quad P(z) = 0.$$

Однако условие $\Omega(\infty) = 0$ требует при этом соблюдения дополнительного условия: произведя в (30.11) предельный переход к $z \to \infty$, найдем

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{\omega(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(a_2-\xi)(\xi-a_1)}} = 0. \qquad (30.14)$$

Искомая функция $\rho(x)$ дается формулой

$$\rho(x) = -\frac{1}{\pi^2}\sqrt{(a_2 - x)(x - a_1)} \fint_{a_1}^{a_2} \frac{\omega(\xi)}{\sqrt{(a_2 - \xi)(\xi - a_1)}} \frac{d\xi}{\xi - x}, \quad (30.15)$$

причем координаты a_1, a_2 концов отрезка определяются условиями (30.9) и (30.14).

Задача

Найти распределение дислокаций в однородном поле напряжений ($p(x) = p_0$) на участке с препятствием на одном или на обоих концах.

Решение. В случае препятствия на одном конце (a_2) вычисление интеграла (30.13) дает

$$\rho(x) = \frac{p_0}{\pi D}\sqrt{\frac{x - a_1}{a_2 - x}}.$$

Из условия же (30.9) определяется длина участка расположения дислокаций: $a_2 - a_1 = 2BD/p_0$. Вблизи препятствия, по другую сторону от него, напряжения концентрируются по закону

$$\sigma_{xy} \approx p_0\sqrt{\frac{a_2 - a_1}{x - a_2}}.$$

В случае участка (длины $2L$), ограниченного двумя препятствиями, выбираем начало отсчета x в его середине и находим по (30.12)

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{L^2 - x^2}}\left(\frac{p_0}{D}x + B\right).$$

Г Л А В А V

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ И ВЯЗКОСТЬ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

§ 31. Уравнение теплопроводности в твердых телах

Неравномерная нагретость твердой среды не приводит к возникновению в ней конвекции, как это обычно имеет место в жидкостях. Поэтому перенос тепла осуществляется здесь одной только теплопроводностью. В связи с этим процессы теплопроводности в твердых телах описываются сравнительно более простыми уравнениями, чем в жидкостях, где они осложняются конвекцией.

Уравнение теплопроводности в твердой среде может быть выведено непосредственно из закона сохранения энергии, выраженного в виде уравнения непрерывности для количества тепла. Количество тепла, поглощаемое в единицу времени в единице объема тела, равно $T\partial S/\partial t$, где S — энтропия единицы объема. Эта величина должна быть приравнена $-\operatorname{div}\mathbf{q}$, где $\mathbf{q}$ — плотность потока тепла. Этот поток практически всегда пропорционален градиенту температуры, т. е. может быть записан в виде $\mathbf{q} = -\varkappa\nabla T$ ($\varkappa$ — теплопроводность). Таким образом,

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = \operatorname{div}(\varkappa\nabla T). \tag{31.1}$$

Согласно формуле (6.4) энтропия может быть записана в виде

$$S = S_0(T) + K\alpha u_{ii},$$

где α — температурный коэффициент расширения, а S_0 — энтропия тела в недеформированном состоянии. Будем предполагать, что, как это обычно имеет место, имеющиеся в теле разности температур достаточно малы для того, чтобы можно было считать постоянными такие величины, как $\varkappa$, α и т. п. Тогда уравнение (31.1) после подстановки написанного для S выражения примет вид

$$T\frac{\partial S_0}{\partial t} + \alpha KT\,\frac{\partial u_{ii}}{\partial t} = \varkappa\Delta T.$$

Согласно известной, термодинамической формуле имеем

$$C_p - C_v = K\alpha^2 T.$$

Производную от S_0 можно написать как

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} = \frac{\partial S_0}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{C_v}{T}\frac{\partial T}{\partial t}$$

(производная $\partial S_0/\partial t$ берется при $u_{ii} \equiv \operatorname{div}\mathbf{u} = 0$, т. е. при постоянном объеме).

В результате получим уравнение теплопроводности в следующем виде:

$$C_v\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{C_p - C_v}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{u} = \varkappa\Delta T. \qquad (31.2)$$

Для того чтобы получить полную систему уравнений, надо присоединить сюда еще уравнение, определяющее деформацию неравномерно нагретого тела. Этим уравнением является уравнение равновесия (7.8)

$$2(1-\sigma)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} - (1-2\sigma)\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u} = \frac{2\alpha(1+\sigma)}{3}\nabla T. \qquad (31.3)$$

Из уравнения (31.3) может быть определена, в принципе, деформация тела при произвольно заданном распределении температуры. Подстановка полученного таким образом для $\operatorname{div}\mathbf{u}$ выражения в уравнение (31.2) приведет к уравнению, определяющему распределение температуры, в котором неизвестной функцией является одна только $T(x, y, z, t)$.

Рассмотрим, например, теплопроводность в неограниченной твердой среде с распределением температуры, удовлетворяющим только одному условию: на бесконечности температура стремится к постоянному пределу T_0 и деформация отсутствует. В таком случае уравнение (31.3) приводит к следующей зависимости между $\operatorname{div}\mathbf{u}$ и T (см. задачу 8 § 7):

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = \frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)}\alpha(T - T_0).$$

Подставляя это выражение в (31.2), получим уравнение

$$\frac{(1+\sigma)C_p + 2(1-2\sigma)C_v}{3(2-\sigma)}\frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa\Delta T \qquad (31.4)$$

типа простого уравнения теплопроводности.

Уравнением такого же типа описывается и распределение температуры вдоль длины тонкого прямого стержня, если хотя бы один из его концов не закреплен. Распределение температуры вдоль каждого из поперечных сечений стержня можно считать постоянным, так что T будет функцией только от координаты x вдоль его длины (и от времени). Тепловое расширение такого стержня приводит только к изменению его длины без изменения прямолинейной формы и без возникновения внутренних

напряжений в нем. Ясно поэтому, что производная $\partial S/\partial t$ в общем уравнении (31.1) должна браться при постоянном давлении, и поскольку $(\partial S/\partial t)_p = C_p/T$, то распределение температуры будет описываться одномерным уравнением теплопроводности

$$C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Надо, впрочем, отметить, что с практически достаточной точностью распределение температуры в твердом теле может всегда определяться простым уравнением теплопроводности. Дело в том, что второй член в левой части уравнения (31.2) представляет собой поправку порядка $(C_p - C_v)/C_v$ по сравнению с первым членом. Но у твердых тел разница между различными теплоемкостями обычно весьма мала, и если пренебрегать ею, то уравнение теплопроводности в твердых телах можно всегда писать в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T, \tag{31.5}$$

где χ — есть *температуропроводность*, определяемая как отношение коэффициента $\varkappa$ к некоторой средней теплоемкости C единицы объема, $\chi = \varkappa/C$.

§ 32. Теплопроводность кристаллов

В анизотропном теле направление потока тепла $\mathbf{q}$ не должно, вообще говоря, совпадать с направлением градиента температуры. Поэтому вместо формулы $\mathbf{q} = -\varkappa \Delta T$ между $\mathbf{q}$ и градиентом температуры в кристалле имеет место более общая зависимость

$$q_i = -\varkappa_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k}. \tag{32.1}$$

Тензор второго ранга $\varkappa_{ik}$ называют тензором теплопроводности кристалла. Соответственно этой зависимости уравнение теплопроводности (31.5) тоже будет иметь более общий вид

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa_{ik} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \, \partial x_k}. \tag{32.2}$$

Тензор теплопроводности симметричен:

$$\varkappa_{ik} = \varkappa_{ki}. \tag{32.3}$$

Это утверждение, к доказательству которого мы теперь перейдем, является следствием принципа симметрии кинетических коэффициентов (см. V, § 120).

Скорость увеличения полной энтропии тела благодаря необратимым процессам теплопроводности равна

$$\dot{S}_{\text{пол}} = -\int \frac{\operatorname{div} \mathbf{q}}{T} \, dV = -\int \operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{T} \, dV + \int \mathbf{q} \operatorname{grad} \frac{1}{T} \, dV.$$

Первый интеграл, будучи преобразован в интеграл по поверхности, исчезает. Таким образом, получаем

$$\dot{S}_{\text{пол}} = \int \mathbf{q}\nabla\frac{1}{T}\,dV = -\int \frac{\mathbf{q}\nabla T}{T^2}\,dV,$$

или

$$\dot{S}_{\text{пол}} = -\int \frac{1}{T^2}q_i\frac{\partial T}{\partial x_i}\,dV. \tag{32.4}$$

В соответствии с общим определением кинетических коэффициентов [1]) мы можем на основании (32.4) сделать вывод, что в данном случае таковыми являются коэффициенты $T^2\varkappa_{ik}$ в соотношениях

$$q_i = -T^2\varkappa_{ik}\left(\frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x_k}\right).$$

Поэтому из симметрии кинетических коэффициентов непосредственно следует искомое соотношение (32.3).

Квадратичная форма

$$-q_i\frac{\partial T}{\partial x_i} = \varkappa_{ik}\frac{\partial T}{\partial x_i}\frac{\partial T}{\partial x_k}$$

должна быть существенно положительной, поскольку положительной должна быть производная (32.4) от энтропии по времени. Условием существенной положительности квадратичной формы является, как известно, положительность главных значений матрицы ее коэффициентов. Поэтому все главные значения тензора теплопроводности $\varkappa_{ik}$ всегда положительны, что, впрочем, очевидно и из простых соображений о направлении теплового потока.

Число различных независимых компонент тензора $\varkappa_{ik}$ зависит от симметрии кристалла. Поскольку тензор $\varkappa_{ik}$ симметричен, это число такое же, как у симметричного тензора второго ранга α_{ik} (тензора теплового расширения; см. § 10).

§ 33. Вязкость твердых тел

При изучении движения в упругих телах мы до сих пор считали, что процесс деформирования происходит обратимым образом. В действительности процесс термодинамически обратим, только если он происходит с бесконечно малой скоростью, так что в каждый данный момент в теле успевает установиться состояние термодинамического равновесия. Реальное движение происходит, однако, с конечной скоростью, тело не находится в каждый данный момент в равновесии, и поэтому в нем происходят

---

[1]) Используется определение в форме, данной в VI, § 59.

процессы, стремящиеся привести его в равновесное состояние. Наличие этих процессов и приводит к необратимости движения, проявляющейся, в частности, в диссипации механической энергии, переходящей в конце концов в тепло [1]).

Диссипация энергии обусловливается процессами двух родов. Во-первых, при неодинаковости температуры в разных местах тела в нем возникают необратимые процессы теплопроводности. Во-вторых, если в теле происходит какое-нибудь внутреннее движение, то происходят необратимые процессы, связанные с конечностью скорости движения; эти процессы диссипации энергии можно назвать, как и в жидкостях, процессами внутреннего трения или вязкости.

В большинстве случаев скорость макроскопического движения в теле настолько мала, что диссипация энергии незначительна. Такие «почти обратимые» процессы могут быть описаны с помощью так называемой диссипативной функции (см. V, § 121).

Именно, если имеется некоторая механическая система, движение которой сопровождается диссипацией энергии, то движение может быть описано с помощью обычных уравнений движения, в которых надо только к действующим на систему силам добавить *диссипативные силы* или *силы трения*, являющиеся линейными функциями скоростей. Эти силы могут быть представлены в виде производных по скоростям от некоторой квадратичной функции скоростей, называемой диссипативной функцией R. Сила трения f_a, соответствующая какой-нибудь из обобщенных координат q_a системы, имеет тогда вид

$$f_a = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_a}.$$

Диссипативная функция является существенно положительной квадратичной формой скоростей $\dot{q}_a$. Написанное соотношение эквивалентно соотношению

$$\delta R = -\sum_a f_a\,\delta\dot{q}_a, \tag{33.1}$$

где δR — изменение диссипативной функции при бесконечно малом изменении скоростей. Можно также показать, что удвоенная диссипативная функция $2R$ определяет уменьшение механической энергии системы в единицу времени.

Легко обобщить соотношение (33.1) на случай движения с трением в сплошном теле. В этом случае состояние системы определяется непрерывным рядом обобщенных координат. Этими координатами является вектор смещения $\mathbf{u}$, заданный в каждой

---

[1]) Под механической энергией здесь подразумевается сумма кинетической энергии макроскопического движения в упругом теле и его потенциальной (упругой) энергии, обусловленной наличием деформации.

точке тела. Соответственное этому соотношение (33.1) должно быть написано в интегральном виде:

$$\delta \int R\,dV = -\int f_i\,\delta v_i\,dV, \tag{33.2}$$

где $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$, а $\mathbf{f}$ — диссипативная сила, действующая на единицу объема тела; запишем полную диссипативную функцию всего тела в виде $\int R\,dV$, где R — диссипативная функция, отнесенная к единице объема тела.

Определим теперь общий вид диссипативной функции R для деформируемых тел. Функция R, описывающая внутреннее трение, должна обращаться в нуль, если в теле отсутствует внутреннее движение, в частности, если тело совершает только поступательное или вращательное движение как целое. Другими словами, диссипативная функция должна обращаться в нуль при $\mathbf{v} = \text{const}$ и при $\mathbf{v} = [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}]$. Это значит, что она должна зависеть не от самой скорости, а от ее градиента, причем может содержать лишь такие комбинации производных, которые обращаются в нуль при $\mathbf{v} = [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}]$. Таковыми являются суммы

$$v_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right),$$

т. е. производные тензора деформации по времени[1]). Таким образом, диссипативная функция должна быть квадратичной функцией от v_{ik}. Наиболее общий вид такой функции:

$$R = \frac{1}{2}\,\eta_{iklm} v_{ik} v_{lm}. \tag{33.3}$$

Тензор четвертого ранга η_{iklm} может быть назван тензором вязкости. Этот тензор обладает следующими очевидными свойствами симметрии[2]):

$$\eta_{iklm} = \eta_{lmik} = \eta_{kilm} = \eta_{ikml}. \tag{33.4}$$

Выражение (33.3) аналогично выражению (10.1) для свободной энергии кристалла: вместо тензора упругости в нем стоит теперь тензор η_{iklm}, а вместо u_{ik} — тензор v_{ik}. Поэтому все результаты, полученные в § 10 для тензора λ_{iklm} в кристаллах различной симметрии, в полной мере относятся и к тензору η_{iklm}.

---

[1]) Ср. аналогичные рассуждения по поводу вязкой жидкости (VI, § 15).

[2]) Напомним, что существование диссипативной функции является следствием принципа симметрии кинетических коэффициентов Онсагера. Именно этот принцип приводит к первому из равенств (33.4) (для коэффициентов в линейных соотношениях (33.7)), эквивалентному факту существования квадратичной формы (33.3). Это будет прямо показано по аналогичному поводу в § 41.

В частности, в изотропном теле тензор η_{iklm} имеет всего две независимые компоненты и R может быть записано в виде, аналогичном выражению (4.3) для упругой энергии изотропного тела:

$$R = \eta \left(v_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik} v_{ll} \right)^2 + \frac{\zeta}{2} v_{ll}^2, \tag{33.5}$$

где η и ζ — два коэффициента вязкости. Поскольку R — существенно положительная функция, коэффициенты η, ζ должны быть положительными.

Соотношение (33.2) аналогично соотношению, имеющему место для свободной упругой энергии:

$$\delta \int F\, dV = -\int F_i\, \delta u_i\, dV,$$

где $F_i = \partial \sigma_{ik}/\partial x_k$ — сила, действующая на единицу объема тела. Поэтому выражение для диссипативной силы через тензор v_{ik} может быть написано непосредственно по аналогии с тем, как F_i выражается через u_{ik}:

$$f_i = \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}, \tag{33.6}$$

где диссипативный тензор напряжений σ'_{ik} определяется посредством

$$\sigma'_{ik} = \frac{\partial R}{\partial v_{ik}} = \eta_{iklm} v_{lm}. \tag{33.7}$$

Учет вязкости в уравнениях движения может быть осуществлен, следовательно, просто путем замены тензора напряжений σ_{ik} в этих уравнениях суммой $\sigma_{ik} + \sigma'_{ik}$.

В изотропном теле

$$\sigma'_{ik} = 2\eta \left(v_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik} v_{ll} \right) + \zeta v_{ll} \delta_{ik}. \tag{33.8}$$

Это выражение, естественно, формально совпадает с выражением для вязкого тензора напряжений в жидкости.

§ 34. Поглощение звука в твердых телах

Коэффициент поглощения звука в твердых телах может быть вычислен вполне аналогично тому, как это делается для жидкостей (см. VI, § 79). Произведем здесь соответствующие вычисления для изотропного тела.

Диссипация механической энергии в теле дается суммой

$$\dot{E}_{\text{мех}} = -\frac{\varkappa}{T} \int (\nabla T)^2\, dV - 2\int R\, dV,$$

где первый член обусловлен теплопроводностью, а второй — вязкостью. Воспользовавшись выражением (33.5), имеем, таким

образом, формулу

$$\dot{E}_{\text{мех}} = -\frac{\varkappa}{T}\int (\nabla T)^2\, dV - 2\eta \iint \left(v_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}v_{ll}\right)^2 dV - \zeta \int v_{ll}^2\, dV. \tag{34.1}$$

Для вычисления градиента температуры пользуемся тем, что звуковые колебания в первом приближении адиабатичны. С помощью выражения (6.4) для энтропии запишем условие адиабатичности в виде

$$S_0(T) + K\alpha u_{ll} = S_0(T_0),$$

где T_0 — температура в недеформированном состоянии. Разлагая разность $S_0(T) - S_0(T_0)$ в ряд по степеням $T - T_0$, имеем с точностью до членов первого порядка

$$S_0(T) - S_0(T_0) = (T - T_0)\frac{\partial S_0}{\partial T_0} = \frac{C_v}{T_0}(T - T_0)$$

(производная от энтропии берется при $u_{ii} = 0$, т. е. при постоянном объеме). Таким образом, имеем

$$T - T_0 = -\frac{T\alpha K}{C_v}u_{ii}.$$

Воспользовавшись также соотношениями

$$K \equiv K_{\text{из}} = \frac{C_v}{C_p}K_{\text{ад}}, \qquad \frac{K_{\text{ад}}}{\rho} = c_l^2 - \frac{4}{3}c_t^2,$$

переписываем это выражение в виде

$$T - T_0 = -\frac{T\alpha\rho}{C_p}\left(c_l^2 - \frac{4}{3}c_t^2\right)u_{ii}. \tag{34.2}$$

Рассмотрим сначала поглощение поперечных упругих волн. Теплопроводность вообще не может привести к поглощению таких волн (в рассматриваемом приближении). Действительно, в поперечной волне $u_{ii} = 0$, и потому температура в ней, согласно (34.2), постоянна. Пусть направление распространения волны выбрано в качестве оси x; тогда

$$u_x = 0, \quad u_y = u_{0y}\cos(kx - \omega t), \quad u_z = u_{0z}\cos(kx - \omega t)$$

и из компонент тензора деформации отличны от нуля только

$$u_{xy} = -\frac{u_{0y}k}{2}\sin(kx - \omega t), \quad u_{xz} = -\frac{u_{0z}k}{2}\sin(kx - \omega t).$$

Будем относить диссипацию энергии к единице объема тела; для среднего (по времени) значения этой величины получаем из (34.1)

$$\overline{\dot{E}}_{\text{мех}} = -\frac{\eta\omega^4}{2c_t^2}(u_{0y}^2 + u_{0z}^2),$$

где мы подставили $k = \omega/c_t$. Полная же средняя энергия волны равна удвоенной средней кинетической энергии; относя эту величину тоже к единице объема, получим

$$\overline{E} = \rho\overline{\dot{\mathbf{u}}^2} \equiv \frac{\rho\omega^2}{2}(u_{0y}^2 + u_{0z}^2).$$

Коэффициент поглощения звука определяется как отношение средней диссипации энергии к удвоенному среднему потоку энергии в волне; эта величина определяет закон изменения амплитуды волны с расстоянием, убывающей пропорционально $e^{-\gamma x}$. Таким образом, находим для коэффициента поглощения поперечных волн следующее выражение:

$$\gamma_t = \frac{\left|\overline{\dot{E}}_{\text{мех}}\right|}{2c_l\overline{E}} = \frac{\eta\omega^2}{2\rho c_t^3}. \tag{34.3}$$

В продольной звуковой волне $u_x = u_0\cos(kx - \omega t)$, $u_y = u_z = 0$. Аналогичное вычисление с помощью формул (34.1) и (34.2) приводит к результату:

$$\gamma_l = \frac{\omega^2}{2\rho c_l^3}\left[\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right) + \frac{\varkappa T\alpha^2\rho^2 c_l^2}{C_p^2}\left(1 - \frac{4c_t^2}{3c_l^2}\right)^2\right]. \tag{34.4}$$

Эти формулы относятся, строго говоря, лишь к полностью изотропным аморфным телам. По порядку величины они, однако, определяют закон поглощения звука также и в анизотропных монокристаллах.

Своеобразные особенности представляет поглощение звука в поликристаллических телах. Если длина волны звука λ мала по сравнению с размерами a отдельных кристаллитов, то в каждом кристаллите звук поглощается так же, как он поглощался бы в большом кристалле, и коэффициент поглощения пропорционален ω^2.

Если же $\lambda \gg a$, то характер поглощения меняется. В такой волне можно считать, что каждый кристаллит подвергается воздействию однородно распределенного давления. Но ввиду анизотропии кристаллитов и граничных условий на поверхностях их соприкосновения возникающая при этом деформация неоднородна. Она будет испытывать существенные изменения (изменение порядка величины ее самой) на протяжении размеров кристал-

лита, а не на протяжении длины волны, как это было бы в однородном теле. Для поглощения звука существенны скорости изменения деформации и возникающие градиенты температуры. Из них первые будут иметь по-прежнему обычный порядок величины. Градиенты же температуры в пределах каждого кристаллита аномально велики. Поэтому поглощение звука, обусловленное теплопроводностью, будет велико по сравнению с поглощением, связанным с вязкостью, и достаточно вычислить только первое.

Рассмотрим два различных предельных случая. Время, в течение которого происходит выравнивание температур на расстояниях $\sim a$ путем теплопроводности (время релаксации для теплопроводности), — порядка величины a^2/χ. Предположим сначала, что $\omega \ll \chi/a^2$. Это значит, что время релаксации мало по сравнению с периодом колебаний в волне, и потому тепловое равновесие в пределах каждого кристаллита в значительной степени успевает установиться; мы имеем здесь дело с почти изотермическими колебаниями.

Пусть T' — возникающие в кристаллите разности температур, а T_0' — разности, которые возникли бы при адиабатическом процессе. Расход тепла путем теплопроводности (на единицу объема) есть

$$-\operatorname{div}\mathbf{q} = \varkappa\Delta T' \sim \frac{\varkappa T'}{a^2}.$$

Количество же тепла, выделяющееся при деформации, — порядка величины $\dot{T}_0'C \sim \omega T_0'C$ (C — теплоемкость). Приравнивая эти два выражения, получим

$$T' \sim T_0'\frac{\omega a^2}{\chi}.$$

Температура испытывает изменение $\sim T'$ на протяжении размеров кристаллита, так что ее градиент $\sim T'/a$. Наконец, T_0' находим из (34.2), где надо положить $u_{ii} \sim ku \sim u\omega/c$ (u — амплитуда вектора смещения):

$$T_0' \sim \frac{T\alpha\rho c\omega}{C}u \tag{34.5}$$

(оценивая порядки величин, мы, естественно, не отличаем различные скорости звука c). С помощью этих результатов вычисляем диссипацию энергии в единице объема:

$$\overline{\dot{E}}_{\text{мех}} \sim \frac{\varkappa}{T}(\nabla T)^2 \sim \frac{\varkappa}{T}\left(\frac{T'}{a}\right)^2$$

и, разделив ее на поток энергии $c\overline{E} \sim c\rho\omega^2u^2$, получим искомый коэффициент затухания

$$\gamma \sim \frac{T\alpha^2\rho c a^2}{\chi C}\omega^2 \quad \text{при} \quad \omega \ll \frac{\chi}{a^2} \tag{34.6}$$

(*C. Zener*, 1938). Сравнивая это выражение с обычным выражением (34.3) и (34.4), мы можем сказать, что в рассматриваемом случае поглощение звука поликристаллическим телом происходит так, как если бы оно обладало вязкостью

$$\eta \sim \frac{T\alpha^2\rho^2c^4a^2}{\chi C},$$

гораздо большей, чем истинная вязкость составляющих его кристаллитов.

Далее, рассмотрим частный предельный случай, когда $\omega \gg \chi/a^2$. Другими словами, время релаксации велико по сравнению с периодом колебаний в волне, и за время каждого периода не успевает произойти заметное выравнивание возникающих при деформации разностей температур. Было бы, однако, неправильным считать, что определяющие поглощение звука градиенты температуры порядка величины T_0'/a. Тем самым мы учитывали бы лишь процесс теплопроводности внутри каждого кристаллита. Между тем основную роль в данном случае должен играть теплообмен между соседними кристаллами (*М.А. Исакович*, 1948). Если бы кристаллиты были теплоизолированы друг от друга, то на границе между ними создавались бы разности температур того же порядка величины T_0', что и разности температур в пределах отдельного кристаллита. В действительности же граничные условия требуют непрерывности температуры при переходе через поверхности соприкосновения между кристаллитами. В результате возникают «распространяющиеся» от границ внутрь кристаллита «температурные волны», затухающие на расстоянии [1])

$$\delta \sim \left(\frac{\chi}{\omega}\right)^{1/2}.$$

В рассматриваемом случае $\delta \ll a$, т. е. основной градиент температуры — порядка величины T_0'/δ и имеет место на расстояниях, малых по сравнению с общими размерами кристаллита. Соответствующая часть объема кристаллита $\sim a^2\delta$; относя ее к полному объему $\sim a^3$, найдем среднюю диссипацию энергии:

$$\overline{\dot{E}}_{\text{мех}} \sim \frac{\varkappa}{T}\left(\frac{T_0'}{\delta}\right)^2\frac{a^2\delta}{a^3} \approx \frac{\varkappa T_0'^2}{Ta\delta}.$$

[1]) Напомним, что если теплопроводящая среда ограничена плоскостью $x=0$, избыточная температура которой изменяется периодически по закону $T' = T_0'e^{-i\omega t}$, то распределение температуры в среде описывается «температурной волной»

$$T' = T_0' \exp\left[-i\omega t - (1+i)\,x\,\sqrt{\omega/(2\chi)}\right]$$

(см. VI, § 52).

Подставив для T_0' выражение (34.5) и разделив на $c\overline{E} \sim c\rho\omega^2 u^2$, получим искомый коэффициент поглощения

$$\gamma \sim \frac{T\alpha^2\rho c}{aC}\sqrt{\chi\omega} \quad \text{при} \quad \omega \gg \frac{\chi}{a^2}. \tag{34.7}$$

Он оказывается пропорциональным корню из частоты [1]).

Таким образом, коэффициент поглощения звука в поликристаллическом теле при самых малых частотах ($\omega \ll \chi/a^2$) меняется как ω^2; затем в области $\chi/a^2 \ll \omega \ll c/a$ он меняется пропорционально $\omega^{1/2}$, а при $\omega \gg c/a$ коэффициент поглощения снова пропорционален ω^2.

Аналогичные соображения относятся и к затуханию поперечных волн в тонких стержнях и пластинках. Если h есть толщина стержня или пластинки, то при $\lambda \gg h$ существен градиент температуры в поперечном направлении и затухание обусловлено в основном теплопроводностью (см. задачи этого параграфа). Если при этом выполняется неравенство $\omega \ll \chi/h^2$, то колебания можно считать изотермическими; поэтому при определении, например, частот собственных колебаний стержня или пластинки надо в этом случае пользоваться изотермическими значениями модулей упругости.

Задачи

1. Определить коэффициент затухания продольных собственных колебаний стержня.

Решение. Коэффициент затухания колебаний со временем определяется как

$$\beta = \frac{\left|\dot{\overline{E}}_{\text{мех}}\right|}{2\overline{E}};$$

амплитуда колебаний убывает со временем пропорционально $e^{-\beta t}$.

В продольной волне в каждом малом участке стержня происходит простое растяжение или сжатие; компоненты тензора деформации

$$u_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad u_{xx} = u_{yy} = -\sigma_{\text{ад}}\frac{\partial u_z}{\partial z},$$

при этом $u_z = u_0 \cos kz \cos \omega t$, где

$$k = \frac{\omega}{\sqrt{E_{\text{ад}}/\rho}}.$$

Вычисления, аналогичные приведенным в тексте, приводят к следующему выражению для коэффициентов затухания:

$$\beta = \frac{\omega^2}{2\rho}\left\{\frac{\eta}{3}\frac{3c_l^2 - 4c_t^2}{(c_l^2 - c_t^2)c_t^2} + \frac{\zeta c_t^2}{(c_l^2 - c_t^2)(3c_l^2 - 4c_t^2)} + \frac{\varkappa T\rho^2\alpha^2}{9C_p^2}\right\}.$$

Вместо $E_{\text{ад}}$, $\sigma_{\text{ад}}$ мы ввели здесь скорости c_l, c_t согласно формулам (22.4).

---

[1]) Такой же частотной зависимостью характеризуется поглощение звука, распространяющегося в жидкости или в газе вблизи твердой стенки (например, по трубе); см. VI, § 79.

2. То же для продольных колебаний пластинки.

Решение. Для волн с направлением колебаний, параллельным направлению волны (оси x), имеем следующие отличные от нуля компоненты тензора деформации:

$$u_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad u_{zz} = -\frac{\sigma_{\text{ад}}}{1-\sigma_{\text{ад}}}\frac{\partial u_x}{\partial x}$$

(см. (13.1)). Скорость распространения этих волн равна

$$\left[\frac{E_{\text{ад}}}{\rho(1-\sigma_{\text{ад}}^2)}\right]^{1/2}.$$

Вычисление приводит к результату:

$$\beta = \frac{\omega^2}{2\rho}\left\{\frac{\eta}{3}\frac{3c_l^4+4c_t^4-6c_l^2c_t^2}{c_t^2c_l^2(c_l^2-c_t^2)} + \frac{\zeta c_t^2}{c_l^2(c_l^2-c_t^2)} + \frac{\varkappa T\alpha^2\rho^2(1+\sigma_{\text{ад}})^2}{9C_p^2}\right\}.$$

Для волн с направлением колебаний, перпендикулярным направлению волны, $u_{ll}=0$ и затухание обусловлено одной только вязкостью η. Коэффициент затухания для таких случаев всегда определяется формулой

$$\beta = \frac{\eta\omega^2}{2\rho c_t^2}.$$

К этим случаям относится также и затухание крутильных колебаний в стержнях.

3. Определить коэффициент затухания поперечных собственных колебаний стержня (с частотами, удовлетворяющими условию $\omega \gg \chi/h^2$, h — толщина стержня).

Решение. Основную роль в затухании играет теплопроводность. Согласно § 17 имеем в каждом элементе объема стержня

$$u_{zz} = \frac{x}{R}, \quad u_{xx} = u_{yy} = -\sigma_{\text{ад}}\frac{x}{R}$$

(изгиб в плоскости xz); при $\omega \gg \chi/h^2$ колебания адиабатичны. При слабом изгибе радиус кривизны $R = 1/X''$, так что

$$u_{ii} = (1-2\sigma_{\text{ад}})\,xX''$$

(штрих означает дифференцирование по z). Наиболее быстрое изменение температура испытывает в направлении поперек стержня; поэтому $(\nabla T)^2 \approx (\partial T/\partial x)^2$. С помощью (34.1) и (34.2) получаем для средней диссипации энергии во всем стержне

$$-\frac{\varkappa T\alpha^2E_{\text{ад}}^2S}{9C_p^2}\int \overline{X''^2}\,dz$$

(S — площадь сечения стержня). Среднюю полную энергию можно найти как удвоенную потенциальную энергию:

$$E_{\text{ад}}I_y\int \overline{X''^2}\,dz.$$

Окончательно получим для коэффициента затухания

$$\beta = \frac{\varkappa T\alpha^2SE_{\text{ад}}}{18I_yC_p^2}.$$

4. То же для поперечных колебаний пластинки.

Решение. Согласно (11.4) имеем в каждом элементе объема пластинки

$$u_{ii} = -\frac{1-2\sigma_{\text{ад}}}{1-\sigma_{\text{ад}}}\, z\, \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}$$

(изгиб в плоскости xz). Диссипацию энергии находим по формулам (34.1) и (34.2), а полную среднюю энергию — удваивая выражение (11.6). Коэффициент затухания равен

$$\beta = \frac{2\varkappa T\alpha^2 E_{\text{ад}}}{3C_p^2 h^2}\frac{1+\sigma_{\text{ад}}}{1-\sigma_{\text{ад}}} = \frac{2\varkappa T\alpha^2\rho}{3C_p^2 h^2}\frac{(3c_l^2-4c_t^2)^2 c_t^2}{(c_l^2-c_t^2)c_l^2}.$$

5. Определить изменение собственных частот поперечных колебаний стержня, связанное с неадиабатичностью колебаний. Стержень имеет форму длинной пластинки толщины h. Поверхность стержня предполагается теплоизолированной.

Решение. Пусть $T_{\text{ад}}(x,t)$ есть распределение температуры в стержне при адиабатических колебаниях, а $T(x,t)$ — истинное распределение температуры в нем (x — координата вдоль толщины стержня; изменением температуры вдоль плоскости yz пренебрегаем как более медленным). Поскольку при $T = T_{\text{ад}}$ теплообмен между отдельными участками тела отсутствует, ясно, что уравнение теплопроводности должно иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(T - T_{\text{ад}}) = \chi\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

При периодических колебаниях с частотой ω отклонения $\tau_{\text{ад}} = T_{\text{ад}} - T_0$, $\tau = T - T_0$ температуры от своего равновесного значения T_0 пропорциональны $e^{-i\omega t}$, и мы имеем

$$\tau'' + \frac{i\omega}{\chi}\tau = \frac{i\omega}{\chi}\tau_{\text{ад}}$$

(штрих означает дифференцирование по x). Поскольку $\tau_{\text{ад}}$, согласно (34.2), пропорционально u_{ll}, а компоненты u_{ik} пропорциональны x (см. § 17), то $\tau_{\text{ад}} = Ax$, где A — постоянная, которую нет надобности вычислять (она выпадает из окончательного ответа). Решение уравнения

$$\tau'' + \frac{i\omega}{\chi}\tau = \frac{i\omega}{\chi}Ax$$

с граничным условием $\tau' = 0$ при $x = \pm h/2$ (поверхность стержня теплоизолирована) есть

$$\tau = A\left(x - \frac{\sin kx}{k\cos(kh/2)}\right), \qquad k = (1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}.$$

Момент M_y сил внутренних напряжений в изогнутом стержне (изгиб в плоскости xz) складывается из изотермической части $M_{y\,\text{из}}$ (момент при изотермическом изгибе) и из части, связанной с неравномерной нагретостью стержня. Если $M_{y\,\text{ад}}$ есть момент при адиабатическом изгибе, то при не вполне адиабатическом процессе дополнительная часть момента уменьшается по сравнению с величиной $M_{y\,\text{ад}} - M_{y\,\text{из}}$ в отношении

$$1 + f(\omega) = \int\limits_{-h/2}^{h/2} z\tau\, dz \Bigg/ \int\limits_{-h/2}^{h/2} z\tau_{\text{ад}}\, dz.$$

Определяя при произвольной частоте ω модуль Юнга E_ω как коэффициент пропорциональности между M_y и I_y/R (см. (17.8)) и замечая, что $E_{\text{ад}} - E = E^2T\alpha^2/(9C_p)$ (см. (6.8); E — изотермический модуль Юнга), можем написать:

$$E_\omega = E + [1 + f(\omega)]\, E^2 \frac{T\alpha^2}{9C_p}.$$

Вычисление дает для $f(\omega)$ выражение

$$f(\omega) = \frac{24}{h^3k^3}\left(\frac{kh}{2} - \operatorname{tg}\frac{kh}{2}\right).$$

При $\omega \to \infty$ получаем, как и должно было быть, $f = 1$, так что $E_\infty = E_{\text{ад}}$, а при $\omega \to 0$ $f = 0$ и $E_0 = E$.

Частоты собственных колебаний пропорциональны корню из модуля Юнга (см. задачи 4–6 § 25). Поэтому имеем

$$\omega = \omega_0\left[1 + f(\omega_0)\frac{ET\alpha^2}{18C_p}\right],$$

где ω_0 — значения собственных частот при полной адиабатичности колебаний. Это ω комплексно. Разделяя действительную и мнимую части ($\omega = \omega' + i\beta$), получаем окончательно для собственной частоты

$$\omega' = \omega_0\left[1 - \frac{ET\alpha^2}{3C_p}\frac{1}{\xi^3}\frac{\operatorname{sh}\xi - \sin\xi}{\operatorname{ch}\xi + \cos\xi}\right]$$

и для коэффициента затухания

$$\beta = \frac{2ET\alpha^2\chi}{3C_ph^2}\left[1 - \frac{1}{\xi}\frac{\operatorname{sh}\xi + \sin\xi}{\operatorname{ch}\xi + \cos\xi}\right],$$

где введено обозначение $\xi = h(\omega_0/2\chi)^{1/2}$.

При больших значениях ξ частота ω стремится, как и следовало, к ω_0, а коэффициент затухания к

$$\beta = \frac{2ET\alpha^2\chi}{3C_ph^2}$$

в согласии с результатом задачи 3.

Малые же значения ξ соответствуют почти изотермическим условиям; в этом случае

$$\omega \approx \omega_0\left(1 - \frac{ET\alpha^2}{18C_p}\right) \approx \omega_0\left(\frac{E}{E_{\text{ад}}}\right)^{1/2},$$

а коэффициент затухания

$$\beta = \frac{ET^2\alpha^2h^2}{180C_p\chi}\omega_0^2.$$

§ 35. Очень вязкие жидкости

Для типичных жидкостей уравнения Навье–Стокса применимы до тех пор, пока периоды движения велики по сравнению с молекулярными временами. Это, однако, не относится к очень вязким жидкостям. Для таких жидкостей обычные гидродинамические уравнения становятся неприменимыми уже при

гораздо бо́льших периодах движения. Существуют вязкие жидкости, которые в течение достаточно малых (но в то же время больших по сравнению с молекулярными) промежутков времени ведут себя, как твердые тела (например, глицерин, канифоль). Аморфные твердые тела (например, стекло) можно рассматривать как предельный случай таких жидкостей с весьма большой вязкостью.

Свойства этих жидкостей могут быть описаны следующим способом (предложенным *Максвеллом*). В течение малых промежутков времени они упруго деформируются. После прекращения деформации в них остаются напряжения сдвига, затухающие, однако, со временем, так что по истечении достаточно большого промежутка времени никаких внутренних напряжений в жидкости практически не остается. Пусть τ есть порядок величины времени, в течение которого происходит затухание напряжений (τ называют иногда максвелловским временем релаксации). Предположим, что жидкость подвергается воздействию некоторых переменных внешних сил, периодически меняющихся со временем с частотой ω. Если период $1/\omega$ изменения сил велик по сравнению с временем релаксации τ, т. е. $\omega\tau \ll 1$, то рассматриваемая жидкость будет вести себя, как обычная вязкая жидкость. Напротив, при достаточно больших частотах ω (когда $\omega\tau \gg 1$) жидкость будет вести себя, как аморфное твердое тело.

Соответственно таким «промежуточным» свойствам рассматриваемых жидкостей их можно характеризовать одновременно коэффициентом вязкости η и некоторым «модулем сдвига» μ. Легко получить соотношение, связывающее друг с другом порядки величин η, μ и времени релаксации τ. При воздействии периодических сил с достаточно малой частотой, когда жидкость ведет себя, как обычная, тензор напряжений определяется обычным выражением для вязких напряжений в жидкости, т. е.

$$\sigma_{ik} = 2\eta\dot{u}_{ik} = -2i\eta\omega u_{ik}.$$

В обратном предельном случае больших частот жидкость ведет себя, как твердое тело, и внутренние напряжения должны определяться по формулам теории упругости, т. е. $\sigma_{ik} = 2\mu u_{ik}$ (речь идет все время о «деформациях чистого сдвига», так что предполагается, что $u_{ii} = 0$, $\sigma_{ii} = 0$). При частотах порядка $\omega \sim 1/\tau$ напряжения, определяющиеся этими двумя выражениями, должны совпадать по порядку величины. Таким образом, имеем $\eta u/\lambda\tau \sim \mu u/\lambda$, откуда

$$\eta \sim \tau\mu. \tag{35.1}$$

Это и есть искомое соотношение.

Выведем, наконец, уравнение движения, качественно описывающее поведение рассматриваемых жидкостей. Для этого будем исходить из наиболее простого предположения о законе затухания внутренних напряжений (после прекращения движения); именно, будем считать, что оно происходит по простому экспоненциальному закону, чему соответствует уравнение

$$\frac{d\sigma_{ik}}{dt} = -\frac{1}{\tau}\sigma_{ik}.$$

С другой стороны, в твердом теле было бы $\sigma_{ik} = 2\mu u_{ik}$, и потому

$$\frac{d\sigma_{ik}}{dt} = 2\mu\frac{du_{ik}}{dt}.$$

Легко видеть, что уравнение

$$\frac{d\sigma_{ik}}{dt} + \frac{1}{\tau}\sigma_{ik} = 2\mu\frac{du_{ik}}{dt} \qquad (35.2)$$

приводит к правильным результатам в обоих предельных случаях медленных и быстрых движений, а потому может служить интерполяционным уравнением для промежуточных случаев.

Так, для периодического движения, когда u_{ik} и σ_{ik} зависят от времени посредством множителя $e^{-i\omega t}$, имеем из (35.2)

$$-i\omega\sigma_{ik} + \frac{1}{\tau}\sigma_{ik} = -2i\omega\mu u_{ik},$$

откуда

$$\sigma_{ik} = \frac{2\mu}{1 + i/(\omega\tau)}u_{ik}. \qquad (35.3)$$

При $\omega\tau \gg 1$ эта формула дает $\sigma_{ik} = 2\mu u_{ik}$, т. е. обычное выражение для твердых тел, а при $\omega\tau \ll 1$

$$\sigma_{ik} = -2i\mu\tau\omega u_{ik} = 2\mu\tau\dot{u}_{ik}$$

— обычное выражение для жидкости с вязкостью $\mu\tau$.

ГЛАВА VI

МЕХАНИКА ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ [1]

§ 36. Статические деформации нематиков

Жидкие кристаллы представляют собой с макроскопической точки зрения анизотропную текучую среду. Механика этих сред несет в себе черты, свойственные как обычным жидкостям, так и упругим средам, и в этом смысле занимает положение, промежуточное между гидродинамикой и теорией упругости.

Существуют различные типы жидких кристаллов. Категорию *нематических жидких кристаллов* (или, как говорят для краткости, *нематиков*) составляют среды, которые в своем недеформированном состоянии однородны не только макро-, но и микроскопически; анизотропия среды связана только с анизотропной ориентацией молекул в пространстве (см. V, § 139, 140). Подавляющее большинство известных нематиков относится к простейшему их типу, в котором анизотропия полностью определяется заданием в каждой точке среды единичного вектора $\mathbf{n}$, выделяющего всего одно избранное направление; вектор $\mathbf{n}$ называют *директором.* При этом значения $\mathbf{n}$ и $-\mathbf{n}$, различающиеся лишь знаком, физически эквивалентны, так что выделенной является лишь определенная ось, а два противоположных направления вдоль нее эквивалентны. Наконец, свойства этого типа нематиков (в каждом элементе их объема) инвариантны относительно инверсии — изменения знака всех трех координат [2]. Ниже мы рассматриваем только этот тип нематических жидких кристаллов.

Таким образом, состояние нематической среды описывается заданием в каждой ее точке наряду с обычными для жидкости величинами — плотности ρ, давления p и скорости $\mathbf{v}$ — еще и директора $\mathbf{n}$. Все эти величины входят в качестве неизвестных функций координат и времени в уравнения движения нематика.

В равновесном состоянии неподвижный нематик, не находящийся под действием внешних сил (в том числе со стороны ограничивающих его стенок), однороден: во всем его объеме

[1] Эта глава написана совместно с Л.П. Питаевским.

[2] Нематики, не инвариантные относительно инверсии, неустойчивы по отношению к деформации, превращающей их в так называемые холестерики — см. § 43.

$\mathbf{n} = \mathrm{const}$. В деформированном же нематике направление директора медленно меняется по пространству; медленность подразумевается здесь в обычном для макроскопической теории смысле: характерные длины, на которых деформация существенно меняется, велики по сравнению с молекулярными размерами, так что производные $\partial n_i/\partial x_k$ должны рассматриваться как малые величины.

В этой главе мы будем относить все термодинамические величины к единице объема деформированного тела, а не к единице объема недеформированного, как в предыдущих главах. Определенная таким образом плотность свободной энергии F нематической среды складывается из свободной энергии недеформированного нематика $F_0(\rho, T)$ и энергии деформации F_d. Последняя представляет собой квадратичное по производным от $\mathbf{n}$ выражение, общий вид которого (*C.W. Oseen*, 1933; *F.C. Frank*, 1958; *J.L. Ericksen*, 1962)

$$F_d = F - F_0 = \frac{K_1}{2}(\operatorname{div}\mathbf{n})^2 + \frac{K_2}{2}(\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{n})^2 + \frac{K_3}{2}[\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{n}]^2 \qquad (36.1)$$

(см. V § 140); отметим, что для единичного вектора $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ в силу тождества $\nabla\mathbf{n}^2 \equiv 0$ справедливо равенство

$$[\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{n}] = -(\mathbf{n}\nabla)\mathbf{n}, \qquad (36.2)$$

поэтому последний член в (36.1) может быть записан также и в эквивалентной форме $K_3((\mathbf{n}\nabla)\mathbf{n})^2/2$.

Энергия (36.1) играет в механике нематиков роль, аналогичную роли упругой энергии деформированного твердого тела, и именно ее существование придает этой механике некоторые черты теории упругости [1]).

Три квадратичные комбинации производных в (36.1) независимы друг от друга: каждая из них может быть отлична от нуля при равных нулю двух других. Поэтому условие устойчивости недеформированного состояния требует положительности всех трех коэффициентов K_1, K_2, K_3 (функции плотности и температуры); мы будем называть их *модулями упругости* нематика (их называют также *модулями Франка*).

Упомянем, что деформации, в которых отлична от нуля лишь одна из величин $\operatorname{div}\mathbf{n}$, $\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{n}$ или $[\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{n}]$, называют соответ-

[1]) Деформирование жидкого кристалла приводит, вообще говоря, к его диэлектрической поляризации и соответственно к возникновению электрического поля (см. VIII, § 17); этот эффект обычно слаб, и мы не будем рассматривать его влияние на механические свойства среды. Мы не будем также рассматривать влияние, которое оказывает на свойства жидких кристаллов внешнее магнитное поле; ввиду анизотропии магнитной (фактически диамагнитной) восприимчивости нематика магнитное поле оказывает на него ориентирующее действие.

ственно *поперечным изгибом*, *кручением* или *продольным изгибом* [1]). В общем случае, конечно, деформация нематика содержит одновременно все эти три элемента. Для иллюстрации их характера укажем простые примеры. Пусть нематическая среда заполняет пространство между двумя коаксиальными цилиндрическими поверхностями; ρ, φ, z — цилиндрические координаты с осью z по оси цилиндров. Если директор $\mathbf{n}$ в каждой точке среды направлен вдоль радиуса ($n_r = 1$, $n_\varphi = n_z = 0$), то деформация представляет собой поперечный изгиб ($\operatorname{div}\mathbf{n} = 1/r$). Если $\mathbf{n}$ направлен в каждой точке вдоль окружности с центром на оси z ($n_\varphi = 1$, $n_r = n_z = 0$), то мы имеем чистый продольный изгиб ($\operatorname{rot}_z \mathbf{n} = 1/r$). Наконец, если по толщине (ось z) плоскопараллельного слоя нематика направление директора меняется по закону $n_x = \cos\varphi(z)$, $n_y = \sin\varphi(z)$, $n_z = 0$, мы имеем дело с чистым кручением ($\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{n} = -\varphi'(z)$).

Стенки, ограничивающие занимаемый жидкокристаллической средой объем, и даже ее свободная поверхность оказывают на среду ориентирующее воздействие (об этом будет говориться подробнее ниже). Поэтому уже само наличие граничных поверхностей приводит, вообще говоря, к деформированию неподвижной жидкокристаллической среды. Возникает вопрос о нахождении уравнений, определяющих эту деформацию; другими словами — об уравнениях, определяющих равновесное распределение $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ при заданных граничных условиях (*J.L. Ericksen*, 1966).

Для этого исходим из общего термодинамического условия равновесия — минимальности полной свободной энергии тела, т. е. интеграла $\int F\,dV$, представляющего собой функционал от функции $\mathbf{n}(\mathbf{r})$. Поскольку вектор $\mathbf{n}$ единичный, этот функционал должен быть минимален при дополнительном условии $\mathbf{n}^2 = 1$. Следуя известному методу неопределенных множителей Лагранжа, надо потребовать равенства нулю вариации

$$\delta \int \left\{ F - \frac{1}{2}\lambda(\mathbf{r})\mathbf{n}^2 \right\} dV, \tag{36.3}$$

$\lambda(\mathbf{r})$ — некоторая функция. Подынтегральное выражение зависит как от самих функций $n_i(\mathbf{r})$, так и от их производных. Имеем [2])

$$\delta \int F\,dV = \int \left\{ \frac{\partial F}{\partial n_i}\delta n_i + \frac{\partial F}{\partial(\partial_k n_i)}\partial_k \delta n_i \right\} dV =$$
$$= \int \left\{ \frac{\partial F}{\partial n_i} - \partial_k \frac{\partial F}{\partial(\partial_k n_i)} \right\} \delta n_i\,dV + \oint \frac{\partial F}{\partial(\partial_k n_i)}\,\delta n_i\,df_k. \tag{36.4}$$

---

[1]) По английской терминологии: splay, twist или bend.

[2]) В этой главе для упрощения записи формул мы будем пользоваться принятым в современной литературе кратким обозначением оператора дифференцирования по координатам: $\partial_i = \partial/\partial x_i$.

Второй член — интеграл по поверхности тела — существен лишь для нахождения граничных условий. Полагая пока $\delta\mathbf{n} = 0$ на границах, находим для вариации полной свободной энергии

$$\delta\int F\,dV = -\int \mathbf{H}\delta\mathbf{n}\,dV, \qquad (36.5)$$

где $\mathbf{H}$ — вектор с компонентами

$$H_i = \partial_k\pi_{ki} - \frac{\partial F}{\partial n_i}, \quad \pi_{ki} = \frac{\partial F}{\partial(\partial_k n_i)}. \qquad (36.6)$$

Величина $\mathbf{H}$ играет роль поля, стремящегося «выпрямить» направления $\mathbf{n}$ во всем объеме жидкого кристалла; его называют *молекулярным полем*.

Уравнение же (36.3) принимает вид

$$\int (\mathbf{H} + \lambda\mathbf{n})\,\delta\mathbf{n}\,dV = 0,$$

откуда ввиду произвольности вариации $\delta\mathbf{n}$ находим уравнение равновесия в виде $\mathbf{H} = -\lambda\mathbf{n}$. Отсюда $\lambda = -\mathbf{Hn}$, т. е. продольная компонента этого уравнения удовлетворяется за счет выбора λ. Поэтому фактически условие равновесия сводится к требованию коллинеарности векторов $\mathbf{H}$ и $\mathbf{n}$ в каждой точке среды; продольная же компонента $\mathbf{H}$ не имеет физического смысла. Таким образом, условие равновесия можно записать в виде

$$\mathbf{h} \equiv \mathbf{H} - \mathbf{n}(\mathbf{nH}) = 0, \qquad (36.7)$$

введя вектор $\mathbf{h}$, для которого $\mathbf{nh} = 0$.

Найдем явное выражение молекулярного поля, соответствующего свободной энергии (36.1). Для проведения дифференцирования по $\partial_k n_i$ замечаем, что

$$\operatorname{div}\mathbf{n} = \partial_i n_i, \quad \operatorname{rot}_l\mathbf{n} = e_{lki}\,\partial_k n_i$$

(где e_{ikl} — антисимметричный единичный тензор), и поэтому

$$\frac{\partial\operatorname{div}\mathbf{n}}{\partial(\partial_k n_i)} = \delta_{ik}, \quad \frac{\partial}{\partial(\partial_k n_i)}\operatorname{rot}_l\mathbf{n} = e_{lki}.$$

В результате получим для тензора π_{ki} выражение

$$\pi_{ki} = K_1\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{n} + K_2(\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{n})n_l e_{lki} + K_3[[\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{n}]\mathbf{n}]_l\,e_{lki}. \qquad (36.8)$$

Дальнейшее дифференцирование, согласно определению (36.6), приводит к следующей довольно сложной формуле для молекулярного поля:

$$\mathbf{H} = \nabla(K_1\operatorname{div}\mathbf{n}) - \{K_2(\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{n})\operatorname{rot}\mathbf{n} + \operatorname{rot}(K_2(\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{n})\mathbf{n})\} + \\ + \{K_3[[\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{n}]\operatorname{rot}\mathbf{n}] + \operatorname{rot}[K_3\mathbf{n}[\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{n}]]\}. \qquad (36.9)$$

Граничные условия к уравнениям равновесия не могут быть установлены в общем виде: они зависят не только от упругой энергии (36.1), но и от конкретного рода взаимодействия жидкости с ограничивающей ее стенкой; эта поверхностная энергия должна была бы быть включена в полную свободную энергию, минимальность которой определяют условия равновесия. Фактически эти поверхностные силы обычно настолько велики, что именно они устанавливают направление $\mathbf{n}$ на границе, не зависящее от характера деформации в объеме образца. Если граничная твердая поверхность анизотропна, то это направление оказывается вполне определенным (или одним из нескольких вполне определенных). Если же поверхность изотропна (сюда относится и случай свободной поверхности), то оказывается заданным лишь угол между $\mathbf{n}$ и нормалью к поверхности. Если этот угол равен нулю, то $\mathbf{n}$ имеет вполне определенное направление — по нормали к поверхности. Если же угол отличен от нуля, то допустимые направления $\mathbf{n}$ заполняют коническую поверхность с определенным углом раствора.

В этой последней ситуации необходимо поставить дополнительное граничное условие. Оно устанавливается требованием обращения в нуль поверхностного интеграла в (36.4) для вариаций $\delta\mathbf{n}$, представляющих собой повороты $\mathbf{n}$ вокруг нормали в каждой точке поверхности с сохранением угла наклона к ней (т. е. вариаций, не меняющих поверхностной энергии). Такая вариация имеет вид $\delta\mathbf{n} = [\boldsymbol{\nu}\mathbf{n}]\,\delta\varphi$, где $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор нормали, а $\delta\varphi$ — произвольный (в каждой точке поверхности) угол поворота. Написав также элемент поверхности в виде $d\mathbf{f} = \boldsymbol{\nu} df$, получим

$$\oint \pi_{ki} e_{imn} n_n \nu_m \nu_k \delta\varphi\, df = 0,$$

откуда ввиду произвольности $\delta\varphi$ следует граничное условие

$$\pi_{ki} e_{imn} n_n \nu_m \nu_k = 0, \tag{36.10}$$

или, направив ось z вдоль $\boldsymbol{\nu}$:

$$\pi_{zx} n_y - \pi_{zy} n_x = 0. \tag{36.11}$$

Наконец, сделаем еще следующее замечание по поводу фигурирующих в (36.1) модулей упругости. Поскольку они введены как коэффициенты в свободной энергии, ими определяются изотермические деформации тела. Легко видеть, однако, что те же коэффициенты определяют в нематиках также и адиабатические деформации. Действительно, мы видели в § 6, что для твердого тела различие между изотермическими и адиабатическими модулями возникает в силу наличия в свободной энергии члена, линейного по тензору деформации. Для нематиков аналогичную роль мог бы играть член, линейный по производным $\partial_k n_i$. Такой

член должен был бы быть скаляром и к тому же инвариантным по отношению к изменению знака $\mathbf{n}$. Очевидно, что такой член построить нельзя (произведение $\mathbf{n}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{n}$ — псевдоскаляр, а единственный истинный скаляр $\mathrm{div}\,\mathbf{n}$ меняет знак вместе с $\mathbf{n}$). По этой причине изотермические и адиабатические модули нематика совпадают друг с другом (подобно тому, как это имеет место для модуля сдвига изотропного твердого тела — см. § 6). Эти рассуждения можно сформулировать и несколько иначе: в отсутствие линейного члена квадратичная упругая энергия (36.1) является первой «малой поправкой» к термодинамическим величинам недеформированного тела; в силу «теоремы о малых добавках» (см. V, § 15), будучи выражена через соответствующие термодинамические переменные (температуру или энтропию), она одинакова для свободной энергии и для внутренней энергии.

§ 37. Прямолинейные дисклинации в нематиках

Равновесному состоянию нематической среды при заданных граничных условиях не обязательно соответствует всюду непрерывное распределение $\mathbf{n}(\mathbf{r})$, в котором вектор $\mathbf{n}$ имел бы в каждой точке вполне определенное направление. В механике нематиков необходимо рассматривать также и деформации с полями $\mathbf{n}(\mathbf{r})$, содержащими особые точки или особые линии, в которых направление $\mathbf{n}$ оказывается неопределенным. Линейные особенности называют *дисклинациями*.

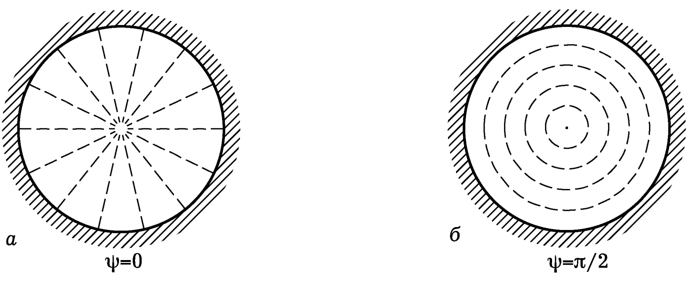


Рис. 27

Возможность возникновения дисклинаций можно проиллюстрировать простыми примерами. Рассмотрим нематик в длинном цилиндрическом сосуде, причем граничные условия требуют перпендикулярности $\mathbf{n}$ поверхности сосуда. Естественно ожидать, что в равновесии вектор $\mathbf{n}$ в каждой точке будет лежать в плоскости поперечного сечения цилиндра и направлен по радиусу в этом сечении (как это изображено на рис. 27 a); очевидно,

что на оси цилиндра направление **n** будет при этом неопределенным, так что эта ось будет дисклинацией. Если же граничные условия требуют параллельности направления **n** стенке сосуда в плоскостях его поперечного сечения, то установится распределение с векторами **n**, лежащими везде вдоль концентрических окружностей в этих плоскостях с центрами на оси цилиндра (рис. 27 *б*); и в этом случае направление **n** на оси будет неопределенным.

Эти два примера — простые частные случаи прямолинейных дисклинаций. Мы рассмотрим общую задачу о возможных распределениях $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ в прямолинейных дисклинациях в неограниченной нематической среде. Очевидно, что распределение $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ в такой дисклинации не зависит от координаты вдоль ее длины, так что достаточно рассматривать его в плоскостях, перпендикулярных оси дисклинации. Будем считать, что и сам вектор **n** лежит везде в этих плоскостях. Таким образом, мы имеем дело с плоской задачей механики нематиков. Некоторые общие свойства решения этой задачи могут быть выяснены уже из общих соображений, без рассмотрения конкретных уравнений равновесия.

Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z с осью z вдоль оси дисклинации. Как уже отмечено, распределение $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ не зависит от координаты z. Оно не может зависеть также и от координаты r, поскольку в поставленной задаче (дисклинация в неограниченной среде) нет никаких параметров с размерностью длины, с помощью которых могла бы быть построена безразмерная (каковой является $\mathbf{n}(\mathbf{r})$) функция переменной r. Таким образом, искомое распределение зависит только от угловой переменной: $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\varphi)$.

Введем угол ψ между **n** и радиус-вектором, проведенным в плоскости $z = \text{const}$ в данную точку (рис. 28); компоненты двумерного (в этой плоскости) вектора **n**:

$$n_r = \cos\psi, \quad n_\varphi = \sin\psi.$$

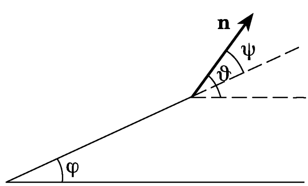


Рис. 28

Полярный угол φ отсчитывается от некоторого избранного направления в плоскости — полярной оси. Введем также угол ϑ между **n** и полярной осью; очевидно, что $\vartheta = \varphi + \psi$.

Искомое решение определяется функцией $\psi(\varphi)$. Оно должно удовлетворять условию физической однозначности — при изменении переменной φ на 2π (т. е. при обходе вокруг начала координат) вектор **n** должен остаться неизменным с точностью до знака (изменение знака допустимо ввиду физической эквивалентности направлений **n** и $-\mathbf{n}$). Это значит, что должно быть

$$\vartheta(\varphi + 2\pi) = \vartheta(\varphi) + 2\pi n,$$

где n — целое или полуцелое положительное или отрицательное число (значение $n = 0$ отвечает «недеформированному» состоянию $\mathbf{n} = \text{const}$). Для функции $\psi(\varphi) = \vartheta - \varphi$ имеем отсюда

$$\psi(\varphi + 2\pi) = 2\pi(n-1) + \psi(\varphi). \tag{37.1}$$

Число n называют *индексом Франка* дисклинации.

Уравнение равновесия (которое будет выписано ниже) определяет производную $d\psi/d\varphi$ и имеет вид

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{1}{f(\psi)}, \tag{37.2}$$

его правая часть не содержит независимой переменной φ — как следствие того, что уравнение должно быть инвариантно по отношению к любому повороту всей системы (нематика) как целого вокруг оси z (т. е. по отношению к преобразованию $\varphi \to \varphi + \varphi_0$); функция $f(\psi)$ периодична с периодом π, поскольку значения ψ и $\psi + \pi$ физически тождественны. Отсюда

$$\varphi = \int_0^\psi f(x)\,dx, \tag{37.3}$$

где постоянная интегрирования выбрана так, что $\psi = 0$ при $\varphi = 0$. Подставив это выражение в (37.1), найдем, что

$$\overline{f} \equiv \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx = \frac{1}{n-1}, \tag{37.4}$$

при $n \neq 1$ (черта означает усреднение по периоду функции).

Отсюда можно сделать важное заключение о симметрии дисклинации: при повороте всей картины на угол $\varphi_0 = \dfrac{2\pi}{2(n-1)}$ вокруг оси z углы ψ меняются на π, т. е. все распределение остается неизменным. Действительно, с учетом периодичности функции $f(\psi)$ это преобразование приводит к тождеству

$$\varphi + \frac{\pi}{n-1} = \int_0^{\psi+\pi} f(x)\,dx = \int_0^\psi f(x)\,dx + \int_\psi^{\psi+\pi} f(x)\,dx = \varphi + \overline{f}\pi.$$

Таким образом, в результате одного лишь требования однозначности ось z автоматически оказывается осью симметрии (C_m) порядка

$$m = 2|n-1|, \quad n \neq 1. \tag{37.5}$$

«Линии тока» директора определяются как линии, в каждой точке которых элемент длины dl ($dl_r = dr$, $dl_\varphi = r\,d\varphi$) параллелен $\mathbf{n}$. Дифференциальное уравнение этих линий:

$$\frac{dl_\varphi}{dl_r} = \frac{n_\varphi}{n_r},$$

т. е.

$$\frac{d\varphi}{d\ln r} = \operatorname{tg}\psi. \tag{37.6}$$

Отсюда видно, в частности, что среди линий тока имеются прямолинейные, на которых $\psi = p\pi$ (p — целое число). Эти линии представляют собой $2\,|n-1|$ радиальных лучей

$$\varphi = \frac{\pi}{|n-1|}p \equiv \varphi_p, \quad \psi = p\pi, \quad p = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1. \tag{37.7}$$

Плоскость поперечного сечения дисклинации делится этими лучами на m одинаковых, повторяющих друг друга секторов.

Перейдем к конкретному построению решения для нематика, энергия деформации которого дается формулой (36.1) [1]).

Для плоского распределения имеем

$$\operatorname{div}\mathbf{n} = \frac{1}{r}\frac{dn_\varphi}{d\varphi} + \frac{n_r}{r} = \frac{1}{r}\cos\psi(1+\psi'),$$

$$\operatorname{rot}_z\mathbf{n} = -\frac{1}{r}\frac{dn_r}{d\varphi} + \frac{n_\varphi}{r} = \frac{1}{r}\sin\psi(1+\psi'),$$

$$\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{n} = 0$$

($\psi' \equiv d\psi/d\varphi$). В свободной энергии остаются только члены с K_1 и K_3 [2]):

$$\int F_d\, r\, dr\, d\varphi = \frac{K_1+K_3}{4}\int(1-\alpha\cos 2\psi)(1+\psi'^2)\frac{d\varphi\, dr}{r}, \quad \alpha = \frac{K_3-K_1}{K_3+K_1}.$$

Интеграл по dr логарифмически расходится. В реальных задачах он обрезается сверху на некоторой длине R порядка величины размеров образца. Снизу же интеграл обрезается на расстояниях порядка величины молекулярных размеров a, где перестает быть применимой макроскопическая теория. При определении интересующего нас решения на расстояниях $a \ll r \ll R$ можно считать множитель

$$L = \int\frac{dr}{r} \approx \ln\frac{R}{a}$$

---

[1]) Эта задача решалась Осееном (*C.W. Oseen*, 1933) и Франком (*F.C. Frank*, 1958) для частного случая нематика, в котором $K_1 = K_3$. Излагаемое ниже общее решение принадлежит И.Е. Дзялошинскому (1970).

[2]) В подынтегральном выражении ниже опущена полная производная $(1-\alpha\cos 2\psi)\cdot 2\psi' = (2\psi - \alpha\sin 2\psi)'$, что не влияет на формулировку вариационной задачи. Мы выводим здесь уравнение равновесия заново, не прибегая к общим уравнениям (36.7), (36.8), что фактически потребовало бы более громоздких вычислений.

просто некоторой постоянной, так что равновесное распределение $\psi(\varphi)$ определяется минимальностью функционала

$$\int_0^{2\pi}(1-\alpha\cos 2\psi)(1+\psi'^2)\,d\varphi = \min. \qquad (37.8)$$

Уравнение Эйлера этой вариационной задачи:

$$(1-\alpha\cos 2\psi)\psi'' = \alpha\sin 2\psi(1-\psi'^2). \qquad (37.9)$$

Оно имеет, прежде всего, два очевидных решения:

$$\psi = 0 \qquad (37.10)$$

и

$$\psi = \pi/2. \qquad (37.11)$$

Это — осесимметричные решения, которым отвечают соответственно рис. 27 *а* и *б* [1]. Эти решения однозначны, т. е. индекс Франка этих дисклинаций $n = 1$ (ср. (37.1)).

Для нахождения решений с $n \neq 1$ замечаем, что уравнение (37.9) имеет первый интеграл [2]

$$(1-\alpha\cos 2\psi)(\psi'^2 - 1) = \mathrm{const} \equiv \frac{1}{q^2} - 1. \qquad (37.12)$$

Отсюда находим решение в виде (37.3) с функцией

$$f(x) = q\left[\frac{1-\alpha\cos 2\psi}{1-\alpha q^2\cos 2\psi}\right]^{1/2}. \qquad (37.13)$$

Константа q определяется условием (37.4)

$$(n-1)q\int_0^{\pi}\left[\frac{1-\alpha\cos 2\psi}{1-\alpha q^2\cos 2\psi}\right]^{1/2} d\psi = \pi \qquad (37.14)$$

(при этом должно быть $|\alpha|\,q^2 < 1$). Эти формулы определяют искомое решение. При каждом n решение единственно: поскольку левая часть условия (37.14) — монотонно возрастающая функция q, это равенство удовлетворяется лишь одним значением q. Функция $f(x)$ четна; поэтому $\varphi(\psi)$ — нечетная функция. Это значит, что плоскость $\varphi = 0$ является плоскостью симметрии

[1]) Отметим, что в «вырожденном» случае $K_1 = K_3$, $\alpha = 0$ существуют решения с любыми $\psi = \mathrm{const}$.

[2]) Если рассматривать подынтегральное выражение в (37.8) как функцию Лагранжа одномерной механической системы (причем ψ играет роль обобщенной координаты, φ — роль времени), то (37.12) есть интеграл энергии.

распределения; в силу существования оси симметрии C_m тем самым возникают еще $m-1$ проходящих через ось z плоскостей симметрии. Наконец, плоскостью симметрии, очевидно, является плоскость $z=0$. Таким образом, дисклинация с индексом n обладает полной симметрией точечной группы $\mathbf{D}_{mh}$.

При $n=2$ из (37.14) очевидным образом следует, что $q=1$, и соответствующее решение есть просто

$$\psi=\varphi=\vartheta/2. \tag{37.15}$$

Для выяснения качественного характера полученных решений исследуем поведение линий тока вблизи радиальных лучей $\varphi=\varphi_p$ (37.7). На этих лучах $\psi=p\pi$, а вблизи них $\psi\approx p\pi$ и функция (37.13) сводится к постоянной:

$$\frac{d\varphi}{d\psi}=f(\psi)\approx q\left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha q^2}\right)^{1/2}\equiv\lambda. \tag{37.16}$$

Отсюда

$$\psi-\pi p\approx\frac{1}{\lambda}(\varphi-\varphi_p).$$

Дифференциальное уравнение линий тока принимает вид

$$\frac{d\ln r}{d\varphi}=\operatorname{ctg}\psi\approx\frac{1}{\psi-\psi_p}\approx\frac{\lambda}{\varphi-\varphi_p},$$

откуда находим для формы линий тока вблизи луча

$$r=\mathrm{const}\cdot|\varphi-\varphi_p|^{\lambda}. \tag{37.17}$$

Если ввести декартовы координаты с осью x вдоль луча, то вблизи последнего: $r\approx x$, $\varphi-\varphi_p\approx y/x$ и уравнение линий тока записывается в виде

$$y=\mathrm{const}\cdot x^{1+1/\lambda}. \tag{37.18}$$

Далее надо рассмотреть различные случаи. При $n\geqslant 3/2$ имеем $n-1>0$, и из (37.14) очевидно, что $q>0$, и потому $\lambda>0$. В этом случае линии тока выходят из начала координат, касаясь луча.

При $n=1/2$ параметр $q<0$, а с ним и $\lambda<0$. Численное исследование уравнения (37.14) показывает, что $q^2>1$, а потому и $|\lambda|>1$. Из (37.18) видно, что y растет вместе с x. Область вблизи начала координат нельзя рассмотреть этим способом, так как, согласно (37.17), при $\lambda<0$ малым значениям $\varphi-\varphi_p$ отвечают большие значения r.

Наконец, при $n<0$ параметр $-1<\lambda<0$ и, согласно (37.18), $y\to 0$ при $x\to\infty$. Линии тока асимптотически прижимаются к лучу.

На рис. 29 схематически показаны линии тока для дисклинаций с $n = 3/2$, $n = 1/2$ и $n = -1/2$.

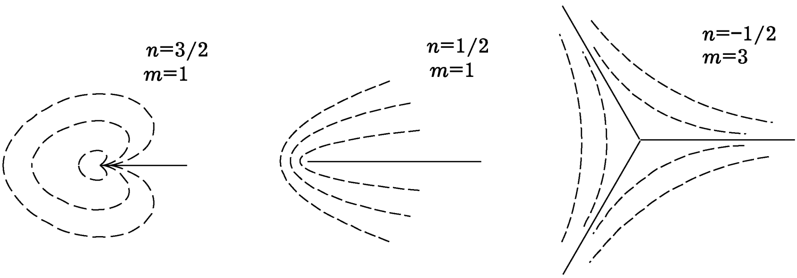


Рис. 29

§ 38. Несингулярное осесимметричное решение уравнений равновесия нематиков

Осесимметричные деформации (37.10), (37.11) (см. рис. 27), представляющие дисклинации с индексом Франка $n = 1$, являются точными решениями уравнений равновесия нематической среды с заданными граничными условиями на стенках сосуда. Однако они не являются единственными решениями этих задач. Они единственны только в категории плоских решений. Если же отказаться от предположения о расположении векторов **n** везде в поперечных к оси сосуда плоскостях, то возможны и другие решения, причем не обладающие особенностью на оси. Так, если граничные условия требуют перпендикулярности **n** стенке, то линии тока директора в таком решении без особенности расположены в меридиональных плоскостях и имеют показанную на рис. 30 форму. Начинаясь на стенке нормально к ней, линии тока изгибаются, стремясь к оси $r = 0$, на которой, таким образом, направление **n** оказывается вполне определенным. Более того, мы увидим, что отсутствие особенности в таком решении приводит к его бо́льшей термодинамической выгодности (меньшей полной упругой свободной энергии) по сравнению с решением с особенностью на оси (*P.E. Cladis*, *M. Kléman*, 1972). Приступим к построению этого решения.

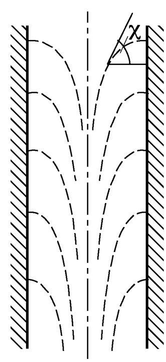


Рис. 30

Будем искать осесимметричное, однородное вдоль оси z решение в цилиндрических координатах r, φ, z в виде

$$n_r = \cos\chi(r), \quad n_\varphi = 0, \quad n_z = \sin\chi(r) \tag{38.1}$$

(смысл угла χ показан на рис. 30). Граничное условие на стенке:

$$\chi = 0 \quad \text{при} \quad r = R \tag{38.2}$$

(R — радиус цилиндрического сосуда), а на оси поставим условие

$$\chi = \pi/2 \quad \text{при} \quad r = 0, \tag{38.3}$$

отвечающее, как уже указано, отсутствию особенности. Имеем

$$\operatorname{rot}_\varphi \mathbf{n} = -\frac{dn_z}{dr} = -\cos\chi\frac{d\chi}{dr},$$
$$\operatorname{div}\mathbf{n} = \frac{1}{r}\frac{d(rn_r)}{dr} = -\sin\chi\frac{d\chi}{dr} + \frac{\cos\chi}{r}.$$

Свободная энергия деформации (на единицу длины вдоль оси z) дается интегралом

$$\int_0^R 2\pi r F_d\,dr = \pi\int_{-\infty}^{\ln R}\{(K_1\sin^2\chi + K_3\cos^2\chi)\chi'^2 + \\ + K_1\cos^2\chi - K_1\sin 2\chi\cdot\chi'\}\,d\xi, \tag{38.4}$$

где штрих означает дифференцирование по переменной $\xi = \ln r$ [1]).

Первый интеграл уравнения равновесия (т. е. уравнения Эйлера вариационной задачи о минимуме функционала (38.4)):

$$(K_1\sin^2\chi + K_3\cos^2\chi)\chi'^2 - K_1\cos^2\chi = \text{const}. \tag{38.5}$$

Согласно условию (38.3) должно быть $\chi \to \pi/2$ при $\xi \to -\infty$. Очевидно, что для этого должно быть $\chi' \to 0$ при $\chi \to \pi/2$; поэтому $\text{const} = 0$, так что

$$\chi' = -\frac{\sqrt{K_1}\cos\chi}{(K_1\sin^2\chi + K_3\cos^2\chi)^{1/2}}.$$

Отсюда находим искомое решение, удовлетворяющее условию (38.2), в виде

$$\ln\frac{R}{r} = \frac{1}{\sqrt{K_1}}\int_0^\chi \frac{(K_1\sin^2\chi + K_3\cos^2\chi)^{1/2}}{\cos\chi}\,d\chi. \tag{38.6}$$

В противоположность дисклинации (37.10) это решение не автомодельно: в него входит размерный параметр длины R. Интеграл

[1]) Последний член в подынтегральном выражении несуществен для формулировки вариационной задачи, но нужен для вычисления полной свободной энергии.

(38.6) выражается через элементарные функции. Выпишем ответ в предположении, что $K_3 > K_1$:

$$\frac{r}{R} = \left\{ \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \chi} - k' \sin \chi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \chi} + k' \sin \chi} \right\}^{1/2} \exp \left\{ -\frac{k}{k'} \arcsin (k \sin \chi) \right\}$$
$$k^2 = \frac{K_3 - K_1}{K_3}, \quad k'^2 = 1 - k^2 = \frac{K_1}{K_3}, \tag{38.7}$$

При $r \to 0$ разность $\pi/2 - \chi$ стремится к нулю пропорционально первой степени r, а линии тока приближаются к оси z по экспоненциальному закону $r \sim \exp(\mathrm{const} \cdot z)$.

Для свободной энергии, связанной с этим решением, вычисление дает

$$\int_0^R F_d 2\pi r \, dr = \pi K_1 \left\{ 2 + \frac{1}{kk'} \arcsin k \right\}. \tag{38.8}$$

Отметим, что это выражение вообще не зависит от радиуса сосуда R. Энергия же дисклинации (рис. 27 *а*; решение (37.10)):

$$\int_0^R 2\pi r F_d \, dr = \pi K_1 L, \tag{38.9}$$

где $L = \ln(R/a)$ — большой логарифм, происхождение которого связано именно с особенностью на оси. Мы видим, что решение без особенности энергетически более выгодно по сравнению с решением с особенностью (если только коэффициент K_1 не аномально мал).

Поле $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ рассмотренного здесь осесимметричного без особенности решения уравнений равновесия может быть получено из поля $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ в дисклинации с $n = 1$ путем непрерывной (т. е. без возникновения каких-либо разрывов) деформации — постепенным выводом векторов $\mathbf{n}$ из плоскостей $z = \mathrm{const}$. Это обстоятельство является проявлением весьма общей ситуации, которая будет выяснена в следующем параграфе.

Задачи

1. Найти осесимметричное решение уравнений равновесия нематической среды в цилиндрическом сосуде без особенности на оси, отвечающее граничным условиям рис. 27 *б*.

Решение. Ищем решение в виде

$$n_r = 0, \quad n_\varphi = \cos \chi(r), \quad n_z = \sin \chi(r)$$

с граничными условиями

$$\chi(R) = 0, \quad \chi(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Имеем

$$\mathrm{rot}_\varphi \, \mathbf{n} = -\cos \chi \frac{d\chi}{dr}, \quad \mathrm{rot}_z \, \mathbf{n} = \frac{\cos \chi}{r} - \sin \chi \frac{d\chi}{dr}, \quad \mathrm{div} \, \mathbf{n} = 0.$$

Свободная энергия:

$$\int_0^R 2\pi r F_d\,dr = \pi \int_{-\infty}^{\ln R} \{K_2(\sin\chi\cos\chi - \chi')^2 + K_3\cos^4\chi\}\,d\xi.$$

Первый интеграл уравнения равновесия:

$$K_2{\chi'}^2 - (K_2\sin^2\chi\cos^2\chi + K_3\cos^4\chi) = 0.$$

Интегрирование этого уравнения приводит к результату (полагаем $K_3 > K_2$):

$$\frac{r}{R} = \left\{\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\chi} - k'\sin\chi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\chi} + k'\sin\chi}\right\}^{1/2}, \quad k^2 = \frac{K_3-K_2}{K_3}, \quad {k'}^2 = \frac{K_2}{K_3}.$$

При $r \to 0$ угол $\chi \to \pi/2$ по закону

$$\frac{\pi}{2} - \chi = 2k'\,\frac{r}{R}.$$

Свободная энергия этой деформации

$$\int_0^R 2\pi r F_d\,dr = \pi K_2\left\{2 + \frac{1}{kk'}\arcsin k\right\},$$

между тем как свободная энергия плоской дисклинации рис. 27 *б*: $\pi K_3 L$.

2. Исследовать устойчивость дисклинации с индексом $n = 1$ относительно малых возмущений вида $\delta\mathbf{n}(\varphi)$ (*С.И. Анисимов*, *И.Е. Дзялошинский*, 1972).

Р е ш е н и е. а) Невозмущенное поле радиальной дисклинации (рис. 27*а*): $n_r = 1$, $n_\varphi = n_z = 0$. Возмущенное же поле пишем в виде

$$n_r = \cos\theta\cos\Phi \approx 1 - \frac{1}{2}(\theta^2+\Phi^2), \quad n_\varphi = \cos\theta\sin\Phi \approx \Phi, \quad n_z = \sin\theta \approx \theta,$$

где углы θ и Φ — функции угловой координаты φ. Энергия, связанная с этим возмущением:

$$\int F_d r\,dr\,d\varphi = \frac{R^2}{4}\int \{K_1{\Phi'}^2 + K_2{\theta'}^2 + (K_3-K_1)\Phi^2 - K_1\theta^2\}\,d\varphi.$$

Для общего исследования надо было бы положить

$$\theta(\varphi) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \theta_s e^{is\varphi}, \quad \Phi(\varphi) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \Phi_s e^{is\varphi}$$

и выразить энергию как функцию всех θ_s, Φ_s. Но и без того сразу видно, что рассматриваемая дисклинация всегда неустойчива относительно возмущения θ_0 (член $-K_1\theta_0^2$ в энергии).

б) Невозмущенное поле циркулярной дисклинации (рис. 27 *б*): $n_r = n_z = 0$, $n_\varphi = 1$. Возмущенное поле записываем в виде

$$n_r = \cos\theta\cos\left(\frac{\pi}{2}+\Phi\right) \approx -\Phi, \quad n_\varphi = \cos\theta\sin\left(\frac{\pi}{2}+\Phi\right) \approx 1 - -\frac{1}{2}(\theta^2+\Phi^2),$$

$$n_z = \sin\theta \approx \theta$$

(определение угла Φ изменено по сравнению с предыдущим случаем). Соответствующая энергия:

$$\int F_d r\,dr\,d\varphi = \frac{R^2}{4}\int \{K_3(\theta'^2+\Phi'^2)+(K_1-K_3)\Phi^2+(K_2-2K_3)\theta^2\}\,d\varphi.$$

Наиболее «опасны» возмущения θ_0 и Φ_0; условия устойчивости по отношению к этим возмущениям:

$$K_1 > K_3, \quad K_2 > 2K_3.$$

Полученное в тексте и в задаче 1 утверждение, что свободная энергия деформации в дисклинациях с $n=1$ превышает энергию несингулярного осесимметричного решения означает лишь, что эти дисклинации могли бы быть в лучшем случае метастабильными. Теперь мы видим, что радиальная дисклинация вообще неустойчива, а циркулярная устойчива (относительно возмущений указанного вида) при соблюдении определенных соотношений между модулями.

3. Нематическая среда заполняет пространство между двумя параллельными плоскостями, причем граничные условия на одной плоскости требуют перпендикулярности, а на другой — параллельности директора поверхности. Определить равновесную конфигурацию $\mathbf{n}(\mathbf{r})$.

Решение. Равновесная конфигурация будет, очевидно, плоской; выберем ее плоскость в качестве плоскости xz с осью z перпендикулярной граничным плоскостям (плоскости $z=0$ и $z=h$). Положим

$$n_x = \sin\chi(z), \quad n_z = \cos\chi(z).$$

Свободная энергия деформации:

$$\int F_d\,dz = \frac{1}{2}\int \{K_1\sin^2\chi + K_2\cos^2\chi\}\chi'^2\,dz.$$

Первый интеграл уравнения равновесия:

$$(K_1\sin^2\chi + K_2\cos^2\chi)\chi'^2 = \text{const},$$

откуда с учетом граничных условий

$$\int\limits_0^{\chi}(K_1\sin^2\chi + K_2\cos^2\chi)^{1/2}\,d\chi = \frac{z}{h}\int\limits_0^{\pi/2}(K_1\sin^2\chi + K_2\cos^2\chi)^{1/2}\,d\chi,$$

или

$$z = h\frac{E(\chi,k)}{E(\pi/2,k)}, \quad k^2 = \frac{(K_2-K_1)}{K_1},$$

где $E(\chi,k)$ — эллиптический интеграл второго рода.

§ 39. Топологические свойства дисклинации

Данное в § 37 определение индекса Франка было существенно связано с предположением о плоском характере деформации в дисклинации и однородностью вдоль ее длины. Покажем теперь, каким образом это понятие может быть введено в общем случае произвольных криволинейных дисклинаций в нематической среде.

Энергия нематика не меняется при одновременном произвольном повороте директора во всех его точках. В этом смысле можно

сказать, что состояния нематика вырождены по направлениям директора; эти направления играют роль *параметра вырождения*. Введем понятие о *пространстве вырождения* — области допускаемого без изменения энергии изменения параметра вырождения. Им является в данном случае поверхность сферы единичного радиуса, каждая точка которой отвечает определенному направлению $\mathbf{n}$. Надо однако учесть еще, что состояния нематика, отличающиеся изменением знака $\mathbf{n}$ физически тождественны. Другими словами, диаметрально противоположные точки на сфере физически эквивалентны. Таким образом, пространство вырождения нематика — сфера, на которой каждые две диаметрально противоположные точки считаются эквивалентными [1]).

Представим себе, что мы производим в физическом объеме нематика обход вокруг расположенной в нем дисклинационной линии по некоторому замкнутому контуру (назовем его контуром γ). Будем следить при этом обходе за направлением вектора $\mathbf{n}$. Изображающая его точка в пространстве вырождения — на сфере — опишет некоторый тоже замкнутый контур (назовем его контуром Γ). Здесь надо различать два случая.

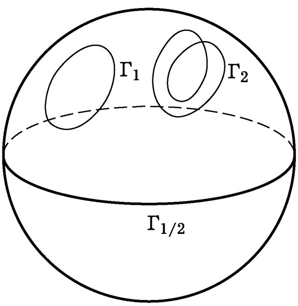


Рис. 31

В одном из них контур Γ замкнут в буквальном смысле. Возвращаясь в исходное положение, изображающая точка описывает некоторое целое число n петель (так, для контуров Γ_1 и Γ_2 на рис. 31 это число равно 1 и 2). Это число и является целочисленным индексом Франка.

В другом случае контур Γ, выйдя из некоторой точки на сфере, заканчивается в диаметрально противоположной точке. Такой контур тоже должен рассматриваться как «замкнутый» ввиду эквивалентности диаметрально противоположных точек. Индекс Франка определяется как полуцелое «число петель», описываемых при этом изображающей точкой (так, для полуокружности $\Gamma_{1/2}$ это число $n = 1/2$).

Любой замкнутый контур на поверхности сферы может быть превращен в любой другой замкнутый контур путем непрерывной (т. е. без разрыва контура) деформации. Более того, любой замкнутый контур может быть непрерывным образом стянут в точку [2]).

---

[1]) Этому геометрическому образу отвечает в топологии так называемая проективная плоскость.

[2]) Деформация контура может отражать собой как изменение контура γ в физическом пространстве, так и изменение самого поля $\mathbf{n}(\mathbf{r})$.

Также могут быть превращены друг в друга любые контуры, начинающиеся и кончающиеся в диаметрально противоположных точках сферы. Такие контуры, однако, не могут быть стянуты в точку: при деформировании концы контура могут смещаться, но лишь оставаясь при этом на концах какого-либо диаметра сферы.

Таким образом, индекс Франка не является топологическим инвариантом. Топологически инвариантен лишь факт его цело- или полуцелочисленности.

Из сказанного следует, что все дисклинации в нематической среде распадаются на две категории, в каждой из которых все дисклинации топологически эквивалентны — могут быть переведены друг в друга путем непрерывного деформирования поля $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ (*С.И. Анисимов*, *И.Е. Дзялошинский*, 1972). Одну категорию составляют дисклинации с целыми индексами Франка; эти дисклинации к тому же топологически неустойчивы — они могут быть вообще устранены путем непрерывного деформирования. Дисклинация целого индекса может заканчиваться в объеме нематика.

Другую категорию составляют дисклинации с полуцелыми индексами. Эти дисклинации неустранимы, они топологически устойчивы.

Вопрос о том, какая из топологически эквивалентных структур должна фактически осуществиться в тех или иных заданных условиях, зависит от относительной термодинамической выгодности этих структур. Это задача выходит за рамки топологического анализа.

Наряду с линейными особенностями, дисклинациями, в нематической среде могут существовать также и точечные особенности. Простейший пример такой особенности — точка, из которой торчат векторы $\mathbf{n}$ во все стороны («еж»).

Для выяснения топологической классификации точечных особенностей снова обратимся к отображениям в пространстве вырождения на единичную сферу. Выберем в заполненном нематиком физическом пространстве две точки A и B, соединенные некоторым контуром γ, окружающим особую точку O, как показано на рис. 32. На единичной сфере контуру γ отвечает определенный контур Г. Будем теперь вращать контур γ вокруг прямой AB. После полного оборота, когда контур совместится сам с собой, он опишет в физическом пространстве замкнутую поверхность σ. Ее отображение Σ, описываемое контуром Г, покроет единичную сферу, возможно, более чем один раз. Число N покрытий единичной сферы отображением Σ является топологической характеристикой особой точки. Отображение Σ можно представить

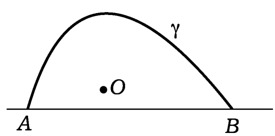


Рис. 32

себе как натянутую на сферу замкнутую пленку; очевидно, что ее никак нельзя (не производя на ней каких-либо разрезов) стянуть в точку. Этим выражается неустранимость особенности. Если $N = 0$, то пленка вообще не охватывает сферу. Это отвечает отсутствию особенности или ее устранимости — такую пленку можно стянуть в точку. Для особых точек в нематике знак N не имеет смысла: его изменение означает лишь изменение направлений $\mathbf{n}$ во всем пространстве на обратные, что не отражается на состоянии нематика.

Число N, характеризующее точечную особенность, может быть только целым. Легко видеть, что полуцелое N означало бы в действительности существование неустранимой линейной, а не точечной особенности. Так, если Σ покрывает половину сферы ($N = 1/2$), то это значит, что, проследив за какой-либо одной точкой на γ, мы найдем, что ее отображение описывает на сфере контур вида $\Gamma_{1/2}$ (рис. 31), что свидетельствовало бы о наличии неустранимой дисклинации с индексом Франка $n = 1/2$[1]).

В связи с обсуждением топологических свойств особенностей в нематиках остановимся кратко на топологическом истолковании дислокаций — особых линий в кристаллических решетках. Представим себе неограниченную кристаллическую решетку и введем оси x_1, x_2, x_3, направленные вдоль трех основных периодов решетки; величины этих периодов пусть будут a_1, a_2, a_3. Энергия решетки не меняется при ее параллельных сдвигах на любые расстояния вдоль осей x_1, x_2, x_3. Области изменения параметров вырождения (величин сдвигов) — отрезки длины a_1, a_2, a_3, причем у каждого отрезка обе его концевые точки рассматриваются как эквивалентные (поскольку сдвиг на период совмещает решетку саму с собой, т. е. оставляет состояние решетки тождественно неизменным). Отрезок с эквивалентными концами топологически совпадает с окружностью. Таким образом, пространство вырождения кристаллической решетки представляет собой трехмерную область, построенную на трех окружностях. Эту область можно представить себе как куб, противоположные грани которого попарно эквивалентны, или, что то же самое, как трехмерную поверхность тора в четырехмерном пространстве[2]). На таком торе существуют не стягиваемые в точку контуры Γ, каждый из которых характеризуется тремя целочисленными топологическими инвариантами n_1, n_2, n_3 — числами обходов трех образующих тор окружностей. Если контур Γ — образ контура γ,

[1]) При целом N подобные рассуждения не привели бы к аналогичному выводу, поскольку дисклинация целого индекса устранима, а отображение с целым N отвечает неустранимой особенности.

[2]) Подобно тому, как квадрат с попарно эквивалентными противоположными сторонами топологически эквивалентен двумерной поверхности тора в трехмерном пространстве.

обходящего в физическом пространстве особую линию (дислокацию), то три его инварианта совпадают с тремя компонентами вектора Бюргерса (измеренными в единицах соответствующих периодов a_1, a_2, a_3). Таким образом, дислокации — топологически устойчивые неустранимые особые линии, а их векторы Бюргерса — топологические инварианты.

§ 40. Уравнения движения нематиков

Состояние движущейся нематической среды определяется распределениями в пространстве четырех величин: директора $\mathbf{n}$, плотности массы ρ, скорости $\mathbf{v}$ и плотности энтропии S. Соответственно этому полная система гидродинамических уравнений движения нематика состоит из четырех уравнений, определяющих производные по времени от указанных величин (*J.L. Eriksen*, 1960; *F.M. Leslie*, 1966) [1]).

Начнем о уравнения для директора. Если нематик находится в равновесии (так что $\mathbf{h} = 0$) и движется как целое с постоянной по пространству скоростью, то это уравнение должно выражать собой просто тот факт, что и значения $\mathbf{n}$ переносятся в пространстве с той же скоростью. Другими словами, каждая частица жидкости перемещается в пространстве со своим значением $\mathbf{n}$. Это выражается равенством нулю полной (или, как говорят, субстанциональной) производной по времени

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{n} = 0. \tag{40.1}$$

В общем же случае произвольного движения в правой части уравнения появляются члены, зависящие от $\mathbf{h}$ и от производных скорости по координатам; в первом неисчезающем гидродинамическом приближении надо ограничиться членами, линейными по этим величинам. Производные $\partial v_i/\partial x_k$ составляют тензор, который можно разделить на симметричную и антисимметричную части:

$$v_{ik} = \frac{1}{2}\,(\partial_i v_k + \partial_k v_i), \quad \Omega_{ik} = \frac{1}{2}\,(\partial_i v_k - \partial_k v_i). \tag{40.2}$$

Для установления зависимости от Ω_{ik} достаточно заметить, что при равномерном вращении нематика как целого с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$, с той же скоростью будет вращаться и все поле $\mathbf{n}(\mathbf{r})$. Такое вращение описывается уравнением

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = \frac{1}{2}[\operatorname{rot}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}] \quad \text{или} \quad \frac{dn_i}{dt} = \Omega_{ki}n_k.$$

---

[1]) Мы, частично, следуем изложению *D. Forster*, *T.C. Lubensky*, *P.C. Martin*, *J. Swift*, *P.S. Pershan* (1971).

Действительно, скорость точек вращающегося как целое тела $\mathbf{v} = [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{r}]$; тогда $\operatorname{rot}\mathbf{v} = 2\boldsymbol{\Omega}$ и для скорости изменения директора получается такое же выражение $d\mathbf{n}/dt = [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{n}]$. Члены же, зависящие от v_{ik}, должны быть составлены с учетом требования $\mathbf{n}\,d\mathbf{n}/dt = 0$, следующего из постоянства квадрата $\mathbf{n}^2 = 1$. Таким образом, приходим к следующему общему виду «уравнения движения директора»:

$$\frac{dn_i}{dt} = \Omega_{ki}n_k + \lambda(\delta_{il} - n_i n_l)n_k v_{kl} + N_i, \tag{40.3}$$

где [1])

$$\mathbf{N} = \mathbf{h}/\gamma. \tag{40.4}$$

Член $\mathbf{N}$ описывает релаксацию директора к равновесию под действием молекулярного поля, а второй член в (40.3) — ориентирующее действие градиента скорости на директор. Коэффициент γ (с размерностью вязкости) и коэффициент λ (безразмерный) в этих членах имеют кинетическую (а не термодинамическую) природу [2]).

Уравнение для временной производной плотности жидкости есть уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0. \tag{40.5}$$

Отметим, что этим уравнением, по существу, определяется гидродинамическая скорость как плотность потока вещества, отнесенная к единице его массы.

Уравнение для временной производной скорости есть динамическое уравнение

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}, \tag{40.6}$$

где $\mathbf{F}$ — сила, действующая на единицу объема. В соответствии с изложенными в § 2 общими рассуждениями, объемные силы могут быть представлены в виде тензорной дивергенции

$$F_i = \partial_k \sigma_{ik},$$

где σ_{ik} — тензор напряжений. Тогда динамическое уравнение запишется в виде

$$\rho\frac{dv_i}{dt} \equiv \rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)v_i\right) = \partial_k\sigma_{ik}. \tag{40.7}$$

Вид тензора напряжений будет установлен ниже.

---

[1]) Обозначение $\mathbf{N}$ введено для более ясного выявления структуры некоторых формул ниже, а также ввиду дальнейших обобщений в § 43.

[2]) Отсутствие в правой части уравнения (40.3) членов с градиентами плотности и энтропии (или температуры) связано с требованиями инвариантности уравнений по отношению к пространственной инверсии и по отношению к изменению знака $\mathbf{n}$. См. об этом подробнее в § 43.

Наконец, остается еще уравнение для энтропии. В отсутствие диссипативных процессов движение жидкости было бы адиабатичным, причем адиабатичным в каждом элементе жидкости, которые передвигались бы со своими постоянными значениями энтропии. Уравнение, выражающее сохранение энтропии, записывалось бы просто в виде уравнения непрерывности для нее:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}(S\mathbf{v}) = 0,$$

где S — энтропия единицы объема, а $\mathbf{v}S$ — плотность потока энтропии [1]. При учете диссипативных процессов энтропийное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}\left(S\mathbf{v} + \frac{\mathbf{q}}{T}\right) = \frac{2R}{T}. \qquad (40.8)$$

Здесь R — так называемая диссипативная функция; $2R/T$ определяет скорость возрастания энтропии [2]; она представляет собой квадратичную форму, составленную из компонент тензора v_{ik} и векторов $\mathbf{h}$ и градиента температуры ∇T. Вектор же $\mathbf{q}$ — плотность потока тепла, связанного с теплопроводностью. Компоненты этого вектора — линейные функции компонент вектора градиента температуры

$$q_i = -\varkappa_{ik}\partial_k T. \qquad (40.9)$$

В нематической среде тензор коэффициентов теплопроводности $\varkappa_{ik}$ имеет две независимые компоненты и может быть представлен в виде

$$\varkappa_{ik} = \varkappa_{||} n_i n_k + \varkappa_{\perp}(\delta_{ik} - n_i n_k), \qquad (40.10)$$

где $\varkappa_{||}$ и $\varkappa_{\perp}$ описывают теплопроводность в продольном и поперечном (по отношению к $\mathbf{n}$) направлениях.

Закон сохранения энергии в гидродинамике выражается уравнением вида

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} + E\right] + \operatorname{div}\mathbf{Q} = 0, \qquad (40.11)$$

где E — плотность внутренней энергии, а $\mathbf{Q}$ — плотность потока энергии. Плотность энергии $E = E_0 + E_d$, где $E_0(\rho, S)$ относится

---

[1]) Это уравнение может быть представлено в эквивалентном виде

$$\frac{d}{dt}\frac{S}{\rho} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{S}{\rho} + (\mathbf{v}\nabla)\frac{S}{\rho} = 0,$$

выражающем постоянство переносимой частицами жидкости энтропии, отнесенной к единице массы.

[2]) Сама же функция $2R$ дает (как и в § 33) скорость диссипации механической энергии (ср. VI, § 79).

к недеформированной, однородной среде, а энергия E_d связана с искажением поля $\mathbf{n}(\mathbf{r})$. Согласно сказанному в конце § 36 величина E_d совпадает со свободной энергией F_d (36.1), с той лишь разницей, что модули упругости K_1, K_2, K_3 подразумеваются выраженными через плотность и энтропию, а не температуру.

Закон сохранения энергии содержится, конечно, в уравнениях движения. Мы же воспользуемся им для установления связи между введенными выше функцией R, тензором σ_{ik} и вектором $\mathbf{N}$.

Раскроем производную по времени в уравнении (40.11) с учетом термодинамических соотношений

$$\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{\rho,\,\mathbf{n}} = T, \qquad \left(\frac{\partial E}{\partial \rho}\right)_{S,\,\mathbf{n}} = \mu,$$

где μ — химический потенциал [1]). Имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\rho v^2}{2} + E\right] = \frac{\mathbf{v}^2}{2}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\mathbf{v}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mu\frac{\partial \rho}{\partial t} + T\frac{\partial S}{\partial t} + \left(\frac{\partial E_d}{\partial t}\right)_{\rho,\,S}. \quad (40.12)$$

Рассмотрим отдельно последний член. Введя обозначение π_{ki} из (36.6), имеем

$$\left(\frac{\partial E_d}{\partial t}\right)_{\rho,\,S} = \left(\frac{\partial E_d}{\partial n_i}\right)_{\rho,\,S}\frac{\partial n_i}{\partial t} + \pi_{ki}\partial_k\frac{\partial n_i}{\partial t} =$$
$$= \left\{\frac{\partial E_d}{\partial n_i} - \partial_k\pi_{ki}\right\}\frac{\partial n_i}{\partial t} + \partial_k\left(\pi_{ki}\frac{\partial n_i}{\partial t}\right) = -\mathbf{h}\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} + \partial_k\left(\pi_{ki}\frac{\partial n_i}{\partial t}\right)$$

(вместо $\mathbf{H}$ здесь написано $\mathbf{h}$, поскольку продольная часть $\mathbf{H}$ сразу выпадает ввиду равенства $\mathbf{n}\,\partial\mathbf{n}/\partial t = 0$). Подставив сюда $\partial\mathbf{n}/\partial t$ из (40.3), пишем

$$\left(\frac{\partial E_d}{\partial t}\right)_{\rho,\,S} = (v_k\partial_k n_i + \Omega_{ik}n_k - \lambda v_{ik}n_k)h_i - \mathbf{N}\mathbf{h} + \operatorname{div}(\cdots)$$

и после выделения еще одной полной дивергенции:

$$\left(\frac{\partial E_d}{\partial t}\right)_{\rho,\,S} = -\mathbf{G}\mathbf{v} - \frac{1}{\gamma}h^2 + \operatorname{div}(\cdots), \quad (40.13)$$

---

[1]) Подчеркнем, что E относится к заданному (единичному) объему, а переменным является число N частиц (молекул) в этом объеме. В V химический потенциал везде относился к одной частице, т. е. определялся как $\mu = \partial E/\partial N$. Поскольку $N = \rho/m$ (m — масса молекулы), то принятое здесь определение отличается от определения в т. V лишь множителем m. Во избежание недоразумений при сравнении с термодинамическим соотношением (3.2а), напомним, что здесь E есть внутренняя энергия единицы объема в точном смысле этого слова, между тем как в § 3 величина $\mathcal{E}$ определена как энергия количества вещества, заключенного в единице объема недеформированного тела.

где

$$G_i = -h_k \partial_i n_k + \frac{1}{2}\partial_k(n_i h_k - n_k h_i) - \frac{\lambda}{2}\partial_k(n_i h_k + n_k h_i). \quad (40.14)$$

Здесь и ниже мы не выписываем полностью выражение под знаком дивергенции с целью уменьшения громоздкости формул. Эти члены (к которым мы вернемся еще в конце параграфа) не существенны для решения поставленного вопроса.

Выражение (40.14) можно представить в виде

$$G_i = \partial_k \sigma_{ik}^{(r)} + (\partial_i E_d)_{\rho,\,S}, \quad (40.15)$$

где

$$\sigma_{ik}^{(r)} = -\pi_{kl}\,\partial_i n_l - \frac{\lambda}{2}(n_i h_k + n_k h_i) + \frac{1}{2}(n_i h_k - n_k h_i). \quad (40.16)$$

При преобразовании использовано равенство

$$(\partial_i E_d)_{\rho,\,S} = \frac{\partial E_d}{\partial n_k}\partial_i n_k + \pi_{ik}\partial_i \partial_l n_k.$$

Определение тензора $\sigma_{ik}^{(r)}$ неоднозначно: выражение (40.15) не изменится при добавлении к $\sigma_{ik}^{(r)}$ любого слагаемого вида $\partial_l \chi_{ilk}$, где χ_{ilk} — произвольный тензор, антисимметричный по последней паре индексов ($\chi_{ilk} = -\chi_{ikl}$). Хотя тензор (40.16) не симметричен, он может быть приведен к симметричному виду прибавлением члена указанного вида с надлежащим образом подобранным тензором χ_{ilk}. Фактическое проведение этой, довольно громоздкой, операции отложим до конца параграфа, а сейчас продолжим вывод уравнений движения, предполагая симметризацию $\sigma_{ik}^{(r)}$ уже произведенной.

Подставив (40.15) в (40.13) и выделяя в одном из членов полную дивергенцию (с учетом симметричности $\sigma_{ik}^{(r)}$), получим [1])

$$\left(\frac{\partial E_d}{\partial t}\right)_{\rho,\,S} = -\mathbf{N}\mathbf{h} + \sigma_{ik}^{(r)} v_{ik} - (\partial_i E)_{\rho,\,S}\, v_i + \operatorname{div}(\cdots). \quad (40.17)$$

Наконец, подставим в (40.12) фигурирующие там производные по времени из (40.5), (40.7), (40.8) и (40.17), причем частную (при постоянных ρ и S) производную от E выразим через полную производную согласно

$$\partial_i E = (\partial_i E)_{\rho,\,S} + \mu \partial_i \rho + T \partial_i S.$$

[1]) Поскольку $E_0 = E_0(\rho, S)$, то $(\partial_i E_d)_{\rho,\,S} = (\partial_i E)_{\rho,\,S}$.

После ряда преобразований (выделения полных дивергенций) получим в результате

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\rho \mathbf{v}^2}{2}+E\right]=-\sigma'_{ik}v_{ik}-\mathbf{Nh}+\frac{1}{T}\mathbf{q}\nabla T+2R+\operatorname{div}(\cdots), \quad (40.18)$$

где σ'_{ik} связано с σ_{ik} формулой

$$\sigma_{ik}=-p\delta_{ik}+\sigma_{ik}^{(r)}+\sigma'_{ik}, \quad (40.19)$$

а давление введено согласно его термодинамическому определению:

$$p=\rho\mu-E+TS \quad (40.20)$$

($\rho\mu=\Phi$ — термодинамический потенциал единицы объема вещества); как и должно было быть, им определяется изотропная часть тензора напряжений.

Сравнив (40.18) с уравнением сохранения энергии (40.11), мы видим, что

$$2R=\sigma'_{ik}v_{ik}+\mathbf{Nh}-\frac{1}{T}\mathbf{q}\nabla T. \quad (40.21)$$

Эта функция определяет вызванное диссипативными процессами увеличение энтропии. Ясно поэтому, что введенный в (40.19) тензор σ'_{ik} представляет собой диссипативную («вязкую») часть тензора напряжений. Тензор же $\sigma_{ik}^{(r)}$ в (40.21) не входит; он представляет собой недиссипативную (помимо связанной с давлением) часть тензора напряжений [1]), специфическую для нематической (в отличие от обычной) жидкости.

Обратим также внимание на то, что в диссипативную функцию не входит коэффициент λ. Хотя описываемый этим безразмерным коэффициентом эффект имеет явно кинетическую (а не термодинамическую) природу, он не диссипативен [2]).

Плотность объемных сил в движущейся нематической среде

$$F_i=-\partial_i p+\partial_k\sigma_{ik}^{(r)}+\partial_k\sigma'_{ik}\equiv-\partial_i p+F_i^{(r)}+F'_i.$$

В неподвижной равновесной (хотя и деформированной) среде $\mathbf{F}'=0$, а согласно условию равновесия (36.7) и $\mathbf{h}=0$. Согласно (40.14), (40.15) при этом сила

$$\mathbf{F}^{(r)}=-(\nabla E_d)_{\rho,S}, \quad \mathbf{F}=-\nabla p-(\nabla E_d)_{\rho,S}.$$

---

[1]) Ее иногда называют реактивной частью (отсюда индекс (r), которым мы снабдили ее обозначение).

[2]) Эта ситуация не уникальна: напомним эффект Холла в электродинамике проводящих тел; он тоже не связан с диссипацией.

Если считать модули упругости постоянными, не зависящими от ρ и S величинами, то $(\nabla E_d)_{\rho, S} = \nabla E_d$ и тогда сила $\mathbf{F} = -\nabla(p+E_d)$. Но в равновесии должно быть также и $\mathbf{F} = 0$. Отсюда следует, что (в указанном предположении) распределение давления вдоль находящейся в равновесии нематической среды дается формулой [1])

$$p = \text{const} - E_d. \tag{40.22}$$

Произведем теперь в явном виде упомянутую выше операцию симметризации тензора $\sigma_{ik}^{(r)}$. Прежде всего, вычислим в явном виде антисимметричную часть этого тензора. При вычислении разности $\sigma_{ik}^{(r)} - \sigma_{ki}^{(r)}$ надо учесть, что выражение

$$B_{ik} = \frac{\partial E_d}{\partial n_i} n_k + \pi_{li}\, \partial_l n_k - \pi_{kl}\, \partial_i n_l$$

симметрично по индексам i, k. Проверить эту симметрию непосредственно нелегко. Проще сделать это косвенным путем, воспользовавшись тем, что энергия E_d — скаляр и тем самым инвариантна относительно произвольных вращений системы координат. При бесконечно малом повороте на угол $\delta\boldsymbol{\varphi}$ координаты преобразуются как

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \delta\mathbf{r}, \quad \delta\mathbf{r} = [\delta\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{r}],$$

т. е.

$$\delta x_i = \varepsilon_{ik} x_k, \quad \varepsilon_{ik} = e_{ilk}\delta\varphi_l = -\varepsilon_{ki}.$$

Для изменения вектора $\mathbf{n}$ и тензора $\partial_k n_i$ имеем соответственно

$$\delta n_i = \varepsilon_{il} n_l, \quad \delta(\partial_k n_i) = \varepsilon_{il}\, \partial_k n_l + \varepsilon_{kl}\, \partial_l n_i.$$

Инвариантность функции E_d при этом повороте означает, что $B_{ik}\varepsilon_{ik} = 0$. Поскольку ε_{ik} — произвольный антисимметричный тензор, то отсюда следует, что B_{ik} — симметричный тензор, что и требовалось доказать.

Имея это в виду, легко привести антисимметричную часть тензора $\sigma_{ik}^{(r)}$ к виду (2.11) с тензором

$$\varphi_{ikl} = n_i \pi_{lk} - n_k \pi_{li}.$$

---

[1]) Если не делать указанных предположений, то силу $\mathbf{F}$ при постоянной температуре можно привести к виду $\mathbf{F} = -\rho\nabla\mu$ так, что условие равновесия сводится к обычному $\mu = \text{const}$. Действительно, дифференцируя выражение (40.20) для давления и учитывая термодинамическое соотношение $dE = T\,dS + \mu\,dp + (dE_d)_{\rho, S}$, найдем $-\nabla p = -\rho\nabla\mu - S\nabla T + (\nabla E_d)_{\rho, S}$, откуда при $T = \text{const}$ и получается указанное выражение для $\mathbf{F}$.

После этого симметризованный тензор $\sigma_{ik}^{(r)}$ получается непосредственно по формуле (2.13). После некоторых приведений получим

$$\sigma_{ik}^{(r)} = -\frac{\lambda}{2}(n_i h_k + n_k h_i) - \frac{1}{2}(\pi_{kl}\,\partial_i n_l + \pi_{il}\,\partial_k n_l) - \\ - \frac{1}{2}\partial_l\,[(\pi_{ik} + \pi_{ki})n_l - \pi_{kl}n_i - \pi_{il}n_k]. \quad (40.23)$$

Отметим, что это выражение фактически содержит только поперечные (по индексу k) компоненты тензора π_{ik}. Если представить последний в виде

$$\pi_{ik} = \pi_{ik}^{(t)} + \pi_{il}n_k n_l$$

(так что $\pi_{ik}^{(t)} n_k = 0$), то в (40.23) останутся только члены с $\pi_{ik}^{(t)}$.

Наконец, вернемся к членам с полными дивергенциями, которые мы до сих пор не выписывали. Сравнив (40.18) с (40.11), видим, что выражение, стоящее под знаком div в совокупности этих членов, определит собой плотность потока энергии. Приведем здесь получающийся таким образом окончательный результат:

$$Q_i = \left(W + \frac{v^2}{2}\right) v_i - \pi_{ik}\{-v_l\,\partial_l n_k + \Omega_{lk} n_l + \lambda n_l(v_{kl} - n_k n_m v_{lm})\} + \\ + \frac{1}{2}(n_i h_k - n_k h_i)v_k + \frac{\lambda}{2}(n_i h_k + n_k h_i)v_k - \sigma'_{ik} v_k - \varkappa_{ik}\,\partial_k T, \quad (40.24)$$

где $W = p + E$ — тепловая функция. Первый член совпадает с выражением потока энергии в гидродинамике обычной жидкости.

§ 41. Диссипативные коэффициенты нематиков

Члены с $\mathbf{N}$ и σ'_{ik} в уравнениях движения выражают собой релаксационные процессы, возникающие вследствие термодинамической неравновесности среды; эта неравновесность в свою очередь связана с отличными от нуля $\mathbf{h}$ и v_{ik}. В обычном гидродинамическом приближении неравновесность предполагается слабой, т. е. величины $\mathbf{h}$, v_{ik} — в определенном смысле малыми. Тогда σ'_{ik} является их линейными функциями.

Однако при принятой нами форме записи уравнений движения зависящих от $\mathbf{h}$ членов в σ'_{ik} писать не надо. Действительно, такие члены, составленные из компонент $\mathbf{h}$ и $\mathbf{n}$, имели бы вид $\mathrm{const}\cdot(n_i h_k + n_k h_i)$. Но член такого вида уже есть в недиссипативной части тензора напряжений $\sigma_{ik}^{(r)}$ (40.23); добавление подобного члена в σ'_{ik} сводилось бы поэтому лишь к переопределению коэффициента λ.

Общий вид линейной зависимости σ'_{ik} от v_{ik}:

$$\sigma'_{ik} = \eta_{iklm} v_{lm}, \tag{41.1}$$

причем тензор четвертого ранга η_{iklm} обладает очевидными свойствами симметрии (следствиями симметрии тензоров σ'_{ik} и v_{ik})

$$\eta_{iklm} = \eta_{kilm} = \eta_{ikml}. \tag{41.2}$$

Кроме того, этот тензор обладает и более глубокой симметрией, следующей из общего принципа симметрии кинетических коэффициентов Онсагера (см. V, § 120; как и в § 32, ниже в этом параграфе мы пользуемся формулировкой этого принципа, данной в VI § 59 и введенными там определениями величин x_a и X_a). Из выражения $2R/T$ для скорости увеличения энтропии видно [1]), что если под величинами $\dot{x}_a$ понимать компоненты тензора σ'_{ik}, то «термодинамически сопряженными» с ними величинами X_a будут компоненты тензора $-v_{lm}/T$ [2]). Компоненты же тензора η_{iklm} играют роль кинетических коэффициентов γ_{ab}. Принцип Онсагера требует равенств $\gamma_{ab} = \gamma_{ba}$, т. е.

$$\eta_{iklm} = \eta_{lmik}. \tag{41.3}$$

Тензор η_{iklm} должен быть составлен лишь с помощью единичного тензора δ_{ik} и вектора $\mathbf{n}$ с учетом указанных свойств симметрии. Имеется всего пять линейно независимых таких комбинаций)

$$n_i n_k n_l n_m, \quad n_i n_k \delta_{lm} + n_l n_m \delta_{ik},$$
$$n_i n_l \delta_{km} + n_k n_l \delta_{im} + n_i n_m \delta_{kl} + n_k n_m \delta_{il},$$
$$\delta_{ik}\delta_{lm}, \quad \delta_{il}\delta_{km} + \delta_{kl}\delta_{im}.$$

Соответственно тензор η_{iklm} имеет пять независимых компонент; представим составленный с его помощью тензор напряжений в виде [3])

$$\begin{aligned}\sigma'_{ik} = 2\eta_1 v_{ik} + (\eta_2 - \eta_1)\delta_{ik} v_{ll} &+ \\ + (\eta_4 + \eta_1 - \eta_2)(\delta_{ik} n_l n_m v_{lm} + n_i n_k v_{ll}) &+ \\ + (\eta_3 - 2\eta_1)(n_i n_l v_{kl} + n_k n_l v_{il}) &+ \\ + (\eta_5 + \eta_1 + \eta_2 - 2\eta_3 - 2\eta_4) n_i n_k n_l n_m v_{lm}&. \end{aligned} \tag{41.4}$$

---

[1]) Напомним, что эта скорость выражается через величины x_a, X_a формулой $2R/T = -\sum\limits_a \dot{x}_a X_a$.

[2]) В литературе о величинах $\dot{x}_a$ и X_a часто говорят соответственно как о *термодинамических потоках* и *термодинамических силах*.

[3]) Диссипативные коэффициенты нематиков были введены (в другом виде) *Лесли* (*F.M. Leslie*, 1966) и *Пароди* (*O. Parodi*, 1970). Общепринятый выбор определений коэффициентов вязкости нематиков в литературе, по-видимому, еще не установился.

Целесообразность именно такого определения всех коэффициентов иллюстрируется следующим выражением диссипативной функции, которое оно принимает при выборе одной из осей координат (оси z) вдоль направления $\mathbf{n}$:

$$2R = 2\eta_1\left(v_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}v_{\gamma\gamma}\right)^2 + \eta_2 v_{\alpha\alpha}^2 + 2\eta_3 v_{\alpha z}^2 + 2\eta_4 v_{zz}v_{\alpha\alpha} + \\ + \eta_5 v_{zz}^2 + \frac{1}{T}\left\{\varkappa_{\|}(\partial_z T)^2 + \varkappa_{\perp}(\partial_\alpha T)^2\right\} + \frac{1}{\gamma}\mathbf{h}^2, \quad (41.5)$$

где индексы α, β, γ пробегают два значения x, y. Поскольку должно быть $R > 0$ (энтропия возрастает), то коэффициенты η_1, η_2, η_3, η_5, $\varkappa_{\|}$, $\varkappa_{\perp}$, γ положительны и, кроме того,

$$\eta_2\eta_5 > \eta_4^2. \quad (41.6)$$

Таким образом, нематическая среда характеризуется всего девятью кинетическими коэффициентами: пятью коэффициентами вязкости, двумя коэффициентами теплопроводности, коэффициентом γ (тоже имеющим размерность вязкости) и бездиссипативным безразмерным коэффициентом λ.

Число фигурирующих в уравнениях движения коэффициентов вязкости уменьшается в важном случае, когда движущуюся жидкость можно считать несжимаемой (для чего ее скорость должна быть мала по сравнению со скоростью звука). Уравнение непрерывности несжимаемой жидкости сводится к равенству $\operatorname{div}\mathbf{v} \equiv v_{ll} = 0$. В тензоре напряжений (41.4) второй член выпадает вовсе, а третий принимает вид $\mathrm{const}\cdot\delta_{ik}(n_l n_m v_{lm})$. Замечаем, что последний член не дает вклада в диссипативную функцию (он выпадает при образовании произведения ${\sigma'}_{ik}v_{ik}$, поскольку $v_{ik}\delta_{ik} = v_{kk} = 0$). Кроме того, он имеет такую же тензорную структуру, как и член $-p\delta_{ik}$ в полном тензоре напряжений σ_{ik}. Между тем, в гидродинамике несжимаемой жидкости давление выступает (наряду со скоростью) просто как одна из неизвестных функций координат и времени, определяемых в результате решения уравнений движения; оно не является здесь термодинамической величиной, связанной с другими подобными величинами уравнением состояния. Поэтому члены $-p\delta_{ik}$ и $\mathrm{const}\,\cdot$ $\cdot\,\delta_{ik}(n_l n_m v_{lm})$ в тензоре напряжений можно объединить друг с другом, что сводится просто к переопределению давления. Таким образом, вязкий тензор напряжений несжимаемой нематической жидкости сводится к выражению

$$\sigma'_{ik} = 2\eta_1 v_{ik} + (\eta_3 - 2\eta_1)(n_i n_l v_{kl} + n_k n_l v_{il}) + \\ + (\overline{\eta}_2 + \eta_1 - 2\eta_3)n_i n_k n_l n_m v_{lm} \quad (41.7)$$

(где $\overline{\eta}_2 = \eta_2 + \eta_5 - 2\eta_4$) и содержит всего три независимых коэффициента вязкости. Соответствующая диссипативная функция

(ось z вдоль $\mathbf{n}$):

$$2R = 2\eta_1 \left(v_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}v_{\gamma\gamma}\right)^2 + \overline{\eta}_2 v_{zz}^2 + 2\eta_3 v_{\alpha z}^2 + \\ + \frac{1}{T}\left\{\varkappa_{\|}(\partial_z T)^2 + \varkappa_{\perp}(\partial_\alpha T)^2\right\} + \frac{1}{\gamma}h^2 \quad (41.8)$$

(напомним, что $v_{\alpha\alpha} + v_{zz} = 0$); положительность коэффициента $\overline{\eta}_2$ обеспечивается неравенством (41.6).

Задача

Определить силу, действующую на прямолинейную дисклинацию (с индексом Франка $n = 1$), движущуюся в перпендикулярном ее оси направлении (*H. Imura*, *K. Okano*, 1973).

Решение. Рассматриваем дисклинацию в системе координат, где она покоится (и совпадает с осью z), а жидкость движется с постоянной скоростью $\mathbf{v}$ вдоль оси x. Распределение $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ в дисклинации в этой системе стационарно и дается формулами (для дисклинации с радиальными «линиями тока директора», рис. 27 *а*)

$$n_x = \cos\varphi, \quad n_y = \sin\varphi,$$

где полярный угол $\varphi = \operatorname{arctg}(y/x)$. В уравнении (40.3) имеем $\partial\mathbf{n}/\partial t = 0$ и $v_{ik} = 0$ (ввиду однородности потока), так что остается

$$v\,\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial x} = \frac{\mathbf{h}}{\gamma}.$$

Отсюда находим для возникающего в результате движения слабого молекулярного поля

$$\mathbf{h} = \gamma v\,[\boldsymbol{\nu}\mathbf{n}]\,\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

где $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор в направлении оси z (в отсутствие движения молекулярное поле $\mathbf{h} = 0$, так как неподвижная дисклинация представляет собой равновесное состояние среды). Диссипативная функция

$$2R = \frac{\mathbf{h}^2}{\gamma} = \gamma v^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 = \gamma v^2\,\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Энергия, диссипируемая в единицу времени (и отнесенная к единице длины линии дисклинации), дается интегралом

$$\int 2R\,dx\,dy = \pi\gamma v^2 L, \quad L = \ln\frac{R}{a},$$

где R — поперечные размеры области движения, а a — молекулярные размеры. Эта диссипация должна компенсироваться работой vf, совершаемой действующей на дисклинацию силой $\mathbf{f}$. Отсюда находим

$$f = \pi\gamma v L.$$

Для дисклинации с круговыми линиями тока (см. рис. 27 *б*) получается такой же результат.

§ 42. Распространение малых колебаний в нематиках

Полная система точных уравнений гидродинамики нематиков очень сложна. Она, естественно, упрощается в случае малых колебаний, когда допустима линеаризация уравнений.

Приступая к исследованию распространения малых колебаний в нематических средах, напомним предварительно, какие типы (моды) колебаний существуют в обычных жидкостях. Прежде всего, это обычные звуковые волны с законом дисперсии (связью между частотой ω и волновым вектором $\mathbf{k}$) $\omega = ck$ и скоростью распространения

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}. \tag{42.1}$$

Колебания в звуковой волне продольны (см. VI, § 64).

Далее, существуют сильно затухающие вязкие волны с законом дисперсии

$$i\omega = \frac{\eta}{\rho}\,k^2, \tag{42.2}$$

где η — коэффициент вязкости (см. VI, § 24). Эти волны поперечны (скорость $\mathbf{v}$ перпендикулярна вектору $\mathbf{k}$), в связи с чем их часто называют *сдвиговыми*. Они могут иметь два независимых направления поляризации; закон дисперсии от направления поляризации не зависит.

Наконец, в неподвижной жидкости малые колебания температуры (и энтропии) распространяются, как столь же сильно затухающие волны с законом дисперсии

$$i\omega = \chi k^2, \tag{42.3}$$

где χ — температуропроводность среды (см. VI, § 52).

Волны аналогичных типов существуют и в нематических средах. Но наличие у нематиков дополнительной динамической переменной — директора $\mathbf{n}$ — приводит к появлению еще и новых, специфических для них типов волн (*P.G. de Gennes*, 1968).

Начнем с обычного звука в нематиках. Легко видеть, что в пределе достаточно длинных волн (т. е. достаточно малых значений k) поправки к скорости звука, связанные с наличием новой динамической переменной, малы, так что скорость звука дается прежней простой формулой (42.1). Представим директор в колеблющейся среде в виде $\mathbf{n} = \mathbf{n}_0 + \delta\mathbf{n}$, где $\mathbf{n}_0$ — постоянное вдоль среды невозмущенное значение, а $\delta\mathbf{n}$ — малая переменная часть (поскольку $\mathbf{n}^2 = \mathbf{n}_0^2 = 1$, то $\mathbf{n}_0\delta\mathbf{n} = 0$). Сравнение левой части уравнения (40.3), с первыми двумя членами в его правой части показывает, что $\omega\delta n \sim kv$, т. е. $\delta n \sim v/c$ (член же $\mathbf{N} = \mathbf{h}/\gamma$ в рассматриваемом приближении является малой величиной бо-

лее высокого порядка, поскольку, согласно (36.9), молекулярное поле $h \backsim k^2$). Поэтому член E_d в плотности энергии жидкости:

$$E_d \sim K(k\delta n)^2 \sim K\left(\frac{vk}{c}\right)^2,$$

т. е. имеет порядок k^2 по сравнению с основным членом, который $\sim \rho v^2$. В рассматриваемом приближении этой энергией можно, следовательно, пренебречь, чем и доказывается сделанное выше утверждение о скорости звука.

В следующем по k приближении появляется связанное с диссипативными процессами поглощение звука. Специфика нематика (по сравнению с обычными жидкостями) проявляется в анизотропии этого поглощения — его зависимости от направления распространения звуковой волны (см. задачу 1).

Остальные типы колебаний в нематиках имеют закон дисперсии, подобный (42.2), (42.3): $\omega \backsim k^2$. Это значит, что при достаточно малых k во всяком случае будет $\omega \ll ck$. В свою очередь отсюда следует, что в этих колебаниях жидкость можно рассматривать как несжимаемую [1]). Уравнение непрерывности сводится тогда к $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ или для плоской волны $\mathbf{kv} = 0$. Таким образом, в отношении колебаний скорости рассматриваемые колебания поперечны — сдвиговые колебания.

Для исследования всех этих колебаний произведем линеаризацию уравнений движения, положив в них $\mathbf{n} = \mathbf{n}_0 + \delta\mathbf{n}$, $p = p_0 + \delta p$. В первом приближении молекулярное поле линейно по производным от $\mathbf{n}$ и тем самым — линейно по $\delta\mathbf{n}$:

$$\mathbf{H} = K_1\nabla \operatorname{div}\delta\mathbf{n} - K_2 \operatorname{rot}(\mathbf{n}_0(\mathbf{n}_0 \operatorname{rot}\,\delta\mathbf{n})) + K_3 \operatorname{rot}[\mathbf{n}_0[\mathbf{n}_0 \operatorname{rot}\delta\mathbf{n}]]. \tag{42.4}$$

Первый же член в «реактивной» части тензора напряжений (40.16) квадратичен по $\delta\mathbf{n}$ и потому должен быть опущен. Должны быть опущены также и квадратичные члены, возникающие при образовании тензорной дивергенции $\partial_k\sigma_{ik}^{(r)}$ в уравнении (40.7) и член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ в его левой части. В результате это уравнение сводится к следующему:

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\partial_i\delta p + \frac{1}{2}(n_{0i}\,\partial_k h_k - n_{0k}\,\partial_k h_i) - \frac{\lambda}{2}(n_{0i}\,\partial_k h_k + n_{0k}\,\partial_k h_i) + \partial_k\sigma'_{ik}. \tag{42.5}$$

[1]) Напомним (см. VI, § 10), что нестационарно движущуюся жидкость можно считать несжимаемой при условиях $v \ll c$ и $\tau \gg l/c$, где τ и l — промежутки времени и расстояния, на которых скорость жидкости испытывает заметное изменение. Для колебательного движения первое условие всегда выполняется при достаточно малых амплитудах колебаний, а второе условие как раз и означает требование $\omega/k \ll c$.

В уравнении же (40.3) достаточно заменить (в первых двух членах в правой части) $\mathbf{n}$ на $\mathbf{n}_0$ и опустить член $(\mathbf{v}\nabla)\delta\mathbf{n}$ в левой части:

$$\frac{\partial \delta n_i}{\partial t} = \Omega_{ki} n_{0k} + \lambda(\delta_{il} - n_{0i} n_{0l})\, n_{0k} v_{kl} + \frac{1}{\gamma} h_i. \qquad (42.6)$$

Ввиду равенств $\mathbf{n}_0 \delta\mathbf{n} = 0$, $\mathbf{vk} = 0$ векторы $\delta\mathbf{n}$ и $\mathbf{v}$ имеют всего по две независимые компоненты. Уравнения (42.5), (42.6) составляют поэтому систему четырех линейных уравнений. Ими определяются четыре колебательные моды, в каждой из которых испытывают связанные друг с другом колебания как скорость, так и директор. Обычно, однако, ситуация существенно упрощается ввиду того, что безразмерное отношение

$$\mu = \frac{K\rho}{\eta^2} \qquad (42.7)$$

оказывается малой величиной $\sim 10^{-2}$–10^{-4} (здесь K и η — порядки величины модулей упругости нематика и его коэффициентов вязкости η_1, $\overline{\eta}_2$, η_3, γ). Как будет показано ниже, при этом можно различать два существенно различных типа колебаний, для каждого из которых уравнения (42.5), (42.6) допускают определенные упрощения.

В одном из них частота связана с волновым вектором соотношением вида

$$i\omega \sim \frac{\eta k^2}{\rho}, \qquad (42.8)$$

аналогичным (42.2) (по причине, которая выяснится ниже, эти колебания называют *быстрыми* сдвиговыми). В обоих уравнениях (42.5), (42.6) можно тогда пренебречь всеми членами, содержащими $\mathbf{h}$. Действительно, из (42.8) видно, что

$$\delta n \sim \frac{kv}{\omega} \sim \frac{\rho v}{\eta k},$$

и поэтому молекулярное поле

$$h \sim K k^2 \delta n \sim \frac{\rho v k K}{\eta}.$$

Используя эти оценки, легко убедиться, что члены с $\mathbf{h}$ в уравнениях малы по сравнению с членами с v_{ik} в отношении $\sim \mu$. Таким образом, система уравнений для быстрых сдвиговых колебаний сводится к

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \partial_k \sigma'_{ik} - \partial_i \delta p, \qquad (42.9)$$

$$\frac{\partial \delta n_i}{\partial t} = \Omega_{ki} n_{0k} + \lambda(\delta_{il} - n_{0i} n_{0l})\, n_{0k} v_{kl}. \qquad (42.10)$$

Первое уравнение не содержит $\delta\mathbf{n}$ и определяет колебания скорости и закон дисперсии, после чего второе уравнение непосредственно дает сопутствующие колебания директора (см. задачу 2).

Перейдем ко второму типу сдвиговых колебаний при условии $\mu \ll 1$ — к специфическим для нематика *медленным* колебаниям директора. В этих колебаниях порядок величины переменной части директора определяется балансом между производной $\partial\delta\mathbf{n}/\partial t$ в левой части уравнения (42.6) и членом $\mathbf{h}/\gamma$ в его правой части: $\omega\delta n \sim h/\gamma$, и поскольку $h \sim Kk^2\delta n$, закон дисперсии этих колебаний качественно дается соотношением

$$i\omega \sim \frac{Kk^2}{\gamma}. \tag{42.11}$$

Очевидно, что производная $\rho\partial\mathbf{v}/\partial t \sim \rho v\omega$ в левой части уравнения (42.5) оказывается при этом малой по сравнению с членами $\partial_k\sigma'_{ik} \sim \eta v k^2$ в его правой части и потому может быть опущена. Уравнение

$$-\partial_i\delta p + \frac{1}{2}(n_{0i}\,\partial_k h_k - n_{0k}\,\partial_k h_i) - \frac{\lambda}{2}(n_{0i}\,\partial_k h_k + n_{0k}\,\partial_k h_i) + \partial_k\sigma'_{ik} = 0 \tag{42.12}$$

определяет связь между колебаниями скорости и директора, после чего закон дисперсии определяется из уравнения (42.6) (см. задачу 3).

Обратим внимание на то, что отношение частот (42.11) и (42.8) $\omega_{\text{м}}/\omega_{\text{б}} \sim \mu$. Таким образом, при одном и том же значении k частота $\omega_{\text{м}}$, мала по сравнению с $\omega_{\text{б}}$; с этим и связано название соответствующих колебаний медленными и быстрыми.

Наконец, температурные колебания в неподвижной нематической среде отличаются от аналогичных колебаний в обычной жидкости лишь появлением анизотропии в законе дисперсии, аналогичном (42.3) (см. задачу 4).

Задачи

1. Определить коэффициент поглощения звука в нематической среде.

Решение. Коэффициент поглощения [1]) вычисляется как отношение

$$\Gamma = \frac{\overline{R}}{c\rho\overline{v^2}}$$

(см. § 34), причем диссипативная функция дается формулой (41.5). При этом в ней можно опустить член $\mathbf{h}^2/\gamma$. Действительно, как уже указано, молекулярное поле $h \backsim k^2$, и потому $h^2/\gamma \backsim k^4$, между тем, как остальные

[1]) Мы обозначаем здесь эту величину через Γ, во избежание путаницы с диссипативным коэффициентом γ.

члены в R пропорциональны более низкой степени волнового вектора — k^2, Простое вычисление приводит к следующему результату [1]):

$$\Gamma = \frac{\omega^2}{2\rho c^3}\Big\{(\eta_1+\eta_2)+2(\eta_3+\eta_4-\eta_1-\eta_2)\cos^2\theta +$$
$$+(\eta_1+\eta_2+\eta_5-2\eta_3-2\eta_4)\cos^4\theta + [\varkappa_\perp + (\varkappa_\parallel - \varkappa_\perp)\cos^2\theta]\left(\frac{1}{c_v}-\frac{1}{c_p}\right)\Big\},$$

где θ — угол между $\mathbf{k}$ (и тем самым $\mathbf{v}$) и $\mathbf{n}$. Вычисление теплопроводностной части поглощения полностью аналогично такому же вычислению для обычной жидкости — см. VI, § 79 (c_p, c_v — теплоемкости единицы массы вещества).

2. Найти закон дисперсии быстрых сдвиговых колебаний.

Решение. Для плоской волны ($\mathbf{v} \backsim \exp i(\mathbf{kr} - i\omega t)$) уравнение (42.9) принимает вид

$$-i\rho\omega v_i = -ik_i\delta p + ik_k\sigma'_{ik}.$$

Для несжимаемого нематика вязкий тензор напряжений дается формулой (41.7), и простое вычисление (с учетом поперечности $\mathbf{v}$, $\mathbf{vk}=0$) приводит уравнение к виду [2])

$$i\rho\omega\mathbf{v} = i\mathbf{k}\delta p + a_1k^2\mathbf{v} + a_2k^2\mathbf{n}(\mathbf{nv}) + a_3k\mathbf{k}(\mathbf{nv}), \tag{1}$$

где

$$a_1 = \eta_1 + \frac{1}{2}(\eta_3 - 2\eta_1)\cos^2\theta,$$
$$a_2 = \frac{1}{2}(\eta_3-2\eta_1) + (\overline{\eta}_2 + \eta_1 - 2\eta_3)\cos^2\theta,$$
$$a_3 = \frac{1}{2}(\eta_3 - 2\eta_1)\cos\theta,$$

где θ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{n}$. Умножив уравнение (1) на $\mathbf{k}$, получим формулу, определяющую колебания давления по колебаниям скорости:

$$\delta p = ik(\mathbf{nv})(a_3 + a_2\cos\theta). \tag{2}$$

Искомый же закон дисперсии определяется поперечными компонентами уравнения (1). Умножив это уравнение на $[\mathbf{nk}]$, получим закон дисперсии

$$i\omega_\perp = \frac{k^2}{\rho}a_1(\theta) = \frac{k^2}{\rho}\left(\eta_1\sin^2\theta + \frac{1}{2}\eta_3\cos^2\theta\right),$$

отвечающий колебаниям $\mathbf{v}$, перпендикулярным плоскости, проходящей через векторы $\mathbf{k}$ и $\mathbf{n}$. Закон же дисперсии для колебаний, поляризованных в указанной плоскости, получится умножением уравнения (1) на $\mathbf{n}$ и исключением из него δp с помощью (2):

$$i\omega_\parallel = \frac{k^2}{\rho}\{a_1(\theta) + a_2(\theta)\sin^2\theta\} = \frac{k^2}{\rho}\left\{\frac{1}{4}(\eta_1+\overline{\eta}_2)\sin^2 2\theta + \frac{1}{2}\eta_3\cos^2 2\theta\right\}.$$

---

[1]) При вычислении квадратичных величин все колеблющиеся величины должны, конечно, записываться в вещественном виде — их зависимость от t и $\mathbf{r}$ дается множителями $\cos(\mathbf{kr} - \omega t)$.

[2]) Для упрощения записи формул индекс у $\mathbf{n}_0$ везде ниже в задачах опускаем.

Оба закона находятся, конечно, в согласии с качественной оценкой (42.8).

3. Найти закон дисперсии медленных сдвиговых колебаний.

Решение. Для плоской волны ($\delta\mathbf{n} \backsim \exp(i\mathbf{kr} - i\omega t)$) линеаризованное молекулярное поле

$$\mathbf{h} = \mathbf{H} - \mathbf{n}(\mathbf{nH}) = -K_1\{\mathbf{k} - \mathbf{n}(\mathbf{nk})\}(\mathbf{k}\delta\mathbf{n}) - K_2\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\nu}\delta\mathbf{n}) - K_3(\mathbf{kn})^2\delta\mathbf{n},$$

где

$$\boldsymbol{\nu} = [\mathbf{nk}] \quad (\boldsymbol{\nu}^2 = k^2\sin^2\theta).$$

Уравнение же (42.12) (с σ'_{ik} из (41.7)) принимает вид

$$-i\mathbf{k}\delta p - a_1k^2\mathbf{v} - a_2k^2\mathbf{n}(\mathbf{nv}) - a_3k\mathbf{k}(\mathbf{nv}) + i\frac{1-\lambda}{2}\mathbf{n}(\mathbf{kh}) - i\frac{1+\lambda}{2}\mathbf{h}(\mathbf{nk}) = 0 \quad (1)$$

(функции $a_1(\theta)$, $a_2(\theta)$ определены в задаче 2). Умножив его на $\boldsymbol{\nu}$, находим связь между колебаниями $\mathbf{v}$ и $\delta\mathbf{n}$, поляризованными перпендикулярно плоскости $\mathbf{k}$, $\mathbf{n}$:

$$a_1(\mathbf{v}\boldsymbol{\nu}) = -i\frac{1+\lambda}{2k^2}(\mathbf{nk})(\mathbf{h}\boldsymbol{\nu}) = i\frac{1+\lambda}{2}(\mathbf{kn})K_\perp(\boldsymbol{\nu}\delta\mathbf{n}), \quad (2)$$

где

$$K_\perp = K_2\sin^2\theta + K_3\cos^2\theta.$$

Далее, пишем уравнение (42.6), умноженное на $\boldsymbol{\nu}$:

$$-i\omega(\boldsymbol{\nu}\delta\mathbf{n}) = \frac{i}{2}(1+\lambda)(\mathbf{nk})(\boldsymbol{\nu}\mathbf{v}) - \frac{k^2K_\perp}{\gamma}(\boldsymbol{\nu}\delta\mathbf{n}).$$

Исключив отсюда $(\mathbf{v}\boldsymbol{\nu})$ с помощью (2), найдем закон дисперсии колебаний, поляризованных перпендикулярно плоскости $\mathbf{k}$, $\mathbf{n}$:

$$\omega_\perp = k^2K_\perp\left\{\frac{1}{\gamma} + \frac{(1+\lambda)^2\cos^2\theta}{4a_1}\right\}.$$

Для нахождения закона дисперсии колебаний, поляризованных в плоскости $\mathbf{kn}$, проецируем уравнение (1) на направление, перпендикулярное вектору $\mathbf{k}$ (в плоскости $\mathbf{nk}$) и умножаем его на $\mathbf{n}$; это дает

$$(\mathbf{nv})(a_1 + a_2\sin^2\theta) = -\frac{i}{2}(1+\lambda\cos 2\theta)K_\parallel(\mathbf{k}\delta\mathbf{n}),$$

где

$$K_\parallel = K_1\sin^2\theta + K_3\cos^2\theta.$$

Произведя такие же операции с уравнением (42.6), получим

$$i\omega(\mathbf{k}\delta\mathbf{n}) = \frac{i}{2}k^2(1+\lambda\cos 2\theta)(\mathbf{nv}) + \frac{k^2}{\gamma}K_\parallel(\mathbf{k}\delta\mathbf{n}).$$

Исключив $(\mathbf{nv})$ из обоих полученных уравнений, найдем закон дисперсии

$$i\omega_\parallel = k^2K_\parallel\left\{\frac{1}{\gamma} + \frac{(1+\lambda\cos 2\theta)^2}{4(a_1 + a_2\sin^2\theta)}\right\}.$$

Оба закона находятся в соответствии с качественной оценкой (42.11) [1]).

4. Найти закон дисперсии температурных колебаний в неподвижном нематике.

Решение. Преобразование уравнения (40.8) для несжимаемого нематика производится в точности так, как это делается в случае обычной жидкости (см. VI, § 50) и приводит к уравнению

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi_{ik}\partial_i\partial_k T, \quad \chi_{ik} = \frac{\varkappa_{ik}}{\rho c_p} = \chi_\| n_i n_k + \chi_\perp(\delta_{ik} - n_i n_k).$$

Для колебаний $\delta T \backsim \exp{(i\mathbf{kr} - i\omega t)}$ находим закон дисперсии

$$i\omega = k^2(\chi_\| \cos^2\theta + \chi_\perp \sin^2\theta).$$

§ 43. Механика холестериков

Холестерические жидкие кристаллы (*холестерики*) отличаются от нематиков отсутствием среди их элементов симметрии центра инверсии. Направления же $\mathbf{n}$ и $-\mathbf{n}$ директора по-прежнему остаются эквивалентными (см. V, § 140).

Отсутствие центра симметрии приводит к тому, что свободная энергия деформации может теперь содержать линейный по производным член — псевдоскаляр $\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{n}$. Ее общий вид может быть представлен в виде

$$F_d = \frac{K_1}{2}(\operatorname{div}\mathbf{n})^2 + \frac{K_2}{2}(\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{n} + q)^2 + \frac{K_3}{2}[\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{n}]^2, \tag{43.1}$$

где q — параметр с размерностью обратной длины. Это отличие приводит к радикальному изменению характера равновесного (в отсутствие внешних воздействий) состояния среды. Оно не является теперь пространственно однородным ($\mathbf{n} = \text{const}$), как у нематиков.

Равновесному состоянию холестерика отвечает распределение направлений директора, для которого

$$\operatorname{div}\mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{n} = -q, \quad [\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{n}] = 0 \tag{43.2}$$

(свободная энергия (43.1) минимальна — равна нулю). Эти уравнения имеют решение:

$$n_x = \cos qz, \quad n_y = \sin qz, \quad n_z = 0. \tag{43.3}$$

Эту структуру (ее называют *геликоидальной*) можно представить себе как результат закручивания вокруг оси z нематической среды, первоначально ориентированной своими $\mathbf{n} = \text{const}$ в

[1]) При вещественных k вещественная величина $i\omega$ должна быть положительной — колебания должны затухать (а не самопроизвольно усиливаться) со временем. Все найденные в задачах 2 и 3 законы дисперсии этим свойством обладают.

одном направлении в плоскости xy. Ориентационная структура холестерика оказывается периодической вдоль одного направления в пространстве (оси z). Вектор $\mathbf{n}$ возвращается к прежнему значению через каждый интервал длины $2\pi/q$ вдоль оси z, но поскольку направления $\mathbf{n}$ и $-\mathbf{n}$ эквивалентны, истинный период повторяемости структуры вдвое меньше — равен π/q. Разумеется, макроскопическое описание геликоидальной структуры холестерика формулами (43.3) имеет смысл, лишь если шаг структуры велик по сравнению с молекулярными размерами. В реальных холестериках это условие выполняется ($\pi/q \sim 10^{-5}$ см).

При выводе уравнений равновесия и уравнений движения нематиков наличие у них центра инверсии не использовалось. Поэтому те же уравнения в их общем виде справедливы и для холестериков. В то же время имеется и ряд отличий. Прежде всего, меняется выражение F_d, с которым должно вычисляться, согласно определению (36.5), молекулярное поле $\mathbf{h}$. Далее, наличие линейного по производным члена в свободной энергии приводит к появлению различия между изотермическими и адиабатическими значениями модуля K_2 (ср. конец § 36). В сформулированной в § 40, 41 системе гидродинамических уравнений основными термодинамическими переменными являются плотность и энтропия. Соответственно этому должны использоваться адиабатические значения (как функции ρ и S) модуля упругости.

Наконец, существенное изменение в гидродинамических уравнениях холестериков по сравнению с уравнениями для нематиков состоит в появлении дополнительных членов в диссипативных частях уравнений — в тензоре напряжений σ'_{ik}, тепловом потоке $\mathbf{q}$ и величине $\mathbf{N}$ в правой стороне части (40.3) (*F.M. Leslie*, 1968):

$$\sigma'_{ik} = (\sigma'_{ik})_{\text{нем}} + \mu(n_i e_{klm} + n_k e_{ilm}) n_m \partial_l T,$$
$$N_i = (N_i)_{\text{нем}} + \nu e_{ikl} n_k \partial_l T, \tag{43.4}$$
$$q_l = (q_l)_{\text{нем}} + \nu_1 e_{lki} n_k h_i + \mu_1 (e_{lmi} n_k + e_{lmk} n_i) n_m v_{ik}$$

(члены с индексом «нем» обозначают выражения из гидродинамики нематиков). Дополнительные члены в этих соотношениях являются не истинными, а псевдотензором и псевдовекторами. Тем самым нарушается симметрия относительно пространственной инверсии, и именно по этой причине эти члены отсутствуют в гидродинамике нематиков. Обратим внимание на то, что построение аналогичных членов, которые были бы истинными тензорами или векторами, невозможно в силу требования инвариантности уравнений относительно изменения знака $\mathbf{n}$. Так, член вида $\text{const}\,(n_i \partial_k T + n_k \partial_i T)$ в σ'_{ik} или член вида $\text{const} \cdot \mathbf{h}$ в $\mathbf{q}$ меняли бы знак вместе с $\mathbf{n}$, между тем как тензор напряжений и тепловой поток должны быть инвариантны по отношению к

этому преобразованию. Аналогичным образом, член вида const$\times$ $\times\nabla T$ в $\mathbf{N}$ невозможен, поскольку он инвариантен по отношению к изменению знака $\mathbf{n}$, между тем как величина $\mathbf{N}$ (определяющая производную $d\mathbf{n}/dt$) должна была бы изменить знак.

Коэффициенты в выражениях (43.4) связаны друг с другом соотношениями, следующими из принципа Онсагера. Для применения этого принципа (ср. § 41) выберем в качестве величин $\dot{x}_a$ — «термодинамических потоков» — величины σ'_{ik}, q_i, N_i. Из вида диссипативной функции (40.21) (точнее, из вида функции $2R/T$, определяющей рост энтропии) видно, что соответствующими «термодинамическими силами» X_a будут величины $-v_{ik}/T$, $\partial_i T/T^2$, $-h_i/T$. Надо также учесть, что величины σ'_{ik} четны, а q_i, N_i нечетны по отношению к обращению времени (как это видно из места, занимаемого ими в уравнениях (40.3), (40.7) и (40.8)). Если величины x_a и x_b имеют одинаковую четность по этому преобразованию, то соответствующие кинетические коэффициенты связаны равенством $\gamma_{ab} = \gamma_{ba}$; если же четности x_a и x_b различны, то $\gamma_{ab} = -\gamma_{ba}$. Сравнив теперь «перекрестные» коэффициенты в соотношениях (43.4) [1]), найдем равенства

$$\nu_1 = \nu T, \quad \mu_1 = \mu T.$$

Таким образом, можно окончательно переписать (43.4) в виде

$$\begin{gathered} \sigma'_{ik} = (\sigma'_{ik})_{\text{нем}} - \mu(n_i[\mathbf{n}\nabla T]_k + n_k[\mathbf{n}\nabla T]_i), \\ \mathbf{N} = \mathbf{N}_{\text{нем}} + \nu[\mathbf{n}\nabla T], \\ \mathbf{q} = \mathbf{q}_{\text{нем}} + \nu T[\mathbf{n}\mathbf{h}] + 2\mu T[\mathbf{n}(v\cdot\mathbf{n})], \end{gathered} \tag{43.5}$$

где символ $(v\cdot\mathbf{n})$ обозначает вектор с компонентами $v_{ik}n_k$.

Итак, в механике холестериков появляется зависимость тензора напряжений и вектора $\mathbf{N}$ от градиента температуры [2]). Форма этой зависимости (векторное произведение $[\mathbf{n}\nabla T]$) означает, что градиент температуры приводит к появлению закручивающих моментов, действующих на директор и на массу жидкости. В то же время молекулярное поле (сопровождающее вращение директора относительно жидкости) и градиенты скорости жидкости приводят к появлению в ней тепловых потоков.

[1]) При сравнении необходимо тщательно следить за порядком индексов в множителе e_{ikl}!

[2]) Напомним (см. VI, § 49), что существование среди диссипативных членов в уравнениях движения членов с градиентом второй независимой термодинамической величины (например, давления) запрещено требованиями закона возрастания энтропии. Наличие таких членов привело бы к появлению в диссипативной функции членов с произведениями $\nabla p\nabla T$, $\mathbf{h}\nabla p$, которые в отсутствие членов с квадратом $(\nabla p)^2$ сделали бы невозможным обеспечение положительности R.

Одно из своеобразных, специфических для холестериков гидродинамических явлений может быть наглядно описано, как «просачивание» жидкости сквозь остающуюся неподвижной геликоидальную структуру (*W. Helfrich*, 1972). Оно состоит в следующем.

Представим себе холестерическую среду, геликоидальная структура которой закреплена в пространстве (скажем, за счет определенных эффектов сцепления с ограничивающими среду стенками). Покажем, что в этих условиях возможно существование однородного по пространству равномерного потока жидкости в направлении оси структуры (ось z).

Поскольку структура (43.3) отвечает равновесному состоянию среды, она обращает в нуль молекулярное поле, $\mathbf{h} = 0$. Наличие «просачивающегося» потока несколько искажает структуру и соответственно создает малое (вместе со скоростью потока v) молекулярное поле. Определим это поле, исходя из уравнения движения директора (40.3). Поскольку поле $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ (в нулевом по скорости приближении) неподвижно, $\partial\mathbf{n}/\partial t = 0$, а поскольку поток жидкости предполагается однородным ($v_z = v = \mathrm{const}$), и $v_{ik} = \Omega_{ik} = 0$. В результате уравнение сводится к равенству

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{n} = v\frac{d\mathbf{n}}{dz} = \frac{\mathbf{h}}{\gamma}.$$

С функцией $\mathbf{n}(z)$ из (43.3) находим отсюда

$$\mathbf{h} = \gamma v\,[\mathbf{q}\mathbf{n}], \tag{43.6}$$

где вектор $\mathbf{q}$ (с абсолютной величиной q) направлен вдоль оси z. В рассматриваемых условиях выражение диссипативной функции (40.21) сводится к $2R = \mathbf{h}^2/\gamma$ и с $\mathbf{h}$ из (43.6):

$$2R = \gamma v^2 q^2. \tag{43.7}$$

Этим дается энергия, диссипируемая в единицу времени в единице объема жидкости. При стационарном движении эта энергия компенсируется работой внешних источников, поддерживающих действующий вдоль оси z градиент давления $p' \equiv dp/dz$. Плотность действующих в среде объемных сил как раз дается градиентом $-\nabla p$; работа этих сил (в единицу времени в единице объема) есть $-p'v$ и приравняв ее $2R$ найдем скорость «просачивания»

$$v = \frac{|p'|}{\gamma q^2}. \tag{43.8}$$

По отношению к частице жидкости, протекающей «сквозь» геликоидальную структуру, директор $\mathbf{n}$ вращается с угловой скоростью vq. Это вращение сопровождается «трением», характеризуемым коэффициентом γ; им и определяется скорость течения.

В реальных условиях скорость не может быть постоянной по всей ширине потока — она должна обращаться в нуль на стенках ограничивающей поток трубки. Падение скорости происходит в слое некоторой толщины δ. Но единственным параметром длины, характерным для рассматриваемого движения, является величина $1/q$. Если принять, что все коэффициенты вязкости холестерика имеют одинаковый порядок величины, то отсутствуют также и какие-либо безразмерные параметры, которые не были бы ~ 1. Очевидно, что в этих условиях возможно лишь $\delta \sim 1/q$. Таким образом, при течении по трубке большого по сравнению с $1/q$ радиуса формула (43.8) будет справедлива везде, за исключением лишь очень тонкого (толщина порядка шага геликоидальной структуры) пристеночного слоя.

§ 44. Упругие свойства смектиков

По принятой терминологии к категории *смектических* жидких кристаллов (или *смектиков*) относятся анизотропные жидкости разнообразной слоистой структуры. По крайней мере некоторые из них представляют собой тела с микроскопической функцией плотности молекул, зависящей только от одной координаты (скажем, z) и периодической по ней, $\rho = \rho(z)$. Напомним (см. V, § 128), что функцией плотности определяется распределение вероятностей различных положений частиц в теле; в данном случае можно говорить о различных положениях молекул как целого, т. е. $\rho\, dV$ есть вероятность центру инерции отдельной молекулы находиться в элементе объема dV. Тело с функцией плотности $\rho(z)$ можно представлять себе как состоящее из свободно смещающихся друг относительно друга плоских слоев, расположенных на одинаковых расстояниях друг от друга. В каждом из слоев расположение центров инерции молекул беспорядочно, и в этом смысле каждый из них представляет собой «двумерную жидкость», жидкие слои, однако, могут быть как изотропными, так и анизотропными. Это различие может быть связано с характером упорядоченной ориентации молекул в слоях. В простейшем случае анизотропия распределения ориентаций задается всего одним направлением $\mathbf{n}$ (скажем, направлением «длинной оси» молекулы). Если это направление перпендикулярно плоскости слоев, слои изотропны, так что ось z является осью аксиальной симметрии тела; такова, по-видимому, структура так называемых *смектиков A*. Если же направление $\mathbf{n}$ наклонно к плоскости xy, то в этой плоскости появляется избранное направление и осевая симметрия исчезает; такова, по-видимому, структура так называемых *смектиков C*.

Мы будем рассматривать ниже только более простые смектики A (и говорить о них просто как о смектиках). Во всех известных смектиках A, помимо аксиальной симметрии вокруг оси z, имеет место также и эквивалентность обоих направлений оси z. Если смектик обладает еще и центром инверсии, то его макроскопическая симметрия (т. е. точечная группа симметрии) такая же, как у нематиков; микроскопическая же симметрия, а с нею и механические свойства, конечно, совершенно разные.

По поводу сказанного до сих пор надо сделать следующую очень важную оговорку. Существование структуры с непостоянной вдоль объема тела функцией плотности предполагает достаточную малость смещений, испытываемых малыми участками тела в результате тепловых флуктуаций. Между тем для структуры с $\rho = \rho(z)$ эти флуктуационные смещения неограниченно растут при увеличении размеров тела (см. V, § 137). Строго говоря, это означает невозможность существования одномерной периодической структуры в неограниченной по своим размерам среде. Фактически, однако, смысл этого утверждения оказывается весьма условным ввиду медленности (всего логарифмической) возрастания флуктуаций при увеличении размеров тела. Оценки (использующие типичные значения материальных констант известных смектиков) показывают, что разрушение одномерной периодической структуры могло бы произойти лишь при практически нереальных огромных размерах и, таким образом, в любой реальной постановке вопроса структура $\rho(z)$ оказывается осуществимой.

Подчеркнем в то же время, что с разрушенной флуктуациями структурой $\rho(z)$ (т. е. в которой стало уже $\rho = \mathrm{const}$) среда отнюдь не становится обычной жидкостью. Принципиальное отличие состоит в свойствах корреляционной функции флуктуаций плотности в различных точках пространства: $\langle\delta\rho(\mathbf{r}_1)\,\delta\rho(\mathbf{r}_2)\rangle$. В обычной жидкости эта функция изотропна и убывает при $r = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \to \infty$ по экспоненциальному закону (см. V, § 116). В системе же с $\rho = \rho(z)$ корреляционная функция остается (при увеличении размеров тела) анизотропной и убывает при $r \to \infty$ лишь по медленному, степенному закону, причем тем медленнее, чем ниже температура (см. V, § 138).

Приступая к построению механики смектических сред, надо начать с отыскания выражения для плотности свободной энергии их деформации. Ввиду микроскопической однородности среды в плоскости xy смещения ее точек в этой плоскости связаны с изменением энергии лишь постольку, поскольку они приводят к изменению плотности вещества. Имея это в виду, выберем в качестве основных гидродинамических переменных (помимо температуры, предполагающейся постоянной вдоль среды) плотность ρ и смещение $u_z \equiv u$ точек среды вдоль оси z. Энергия

деформации зависит от изменения плотности $\rho - \rho_0$ (ρ_0 — плотность недеформированной среды) и от производных смещения u по координатам. При этом первые производные $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$ вообще не могут входить в квадратичную часть свободной энергии: если повернуть тело как целое вокруг осей x или y, то эти производные изменятся, между тем как энергия должна остаться неизменной [1]).

Как всегда в теории упругости, изменения всех величин в пространстве будут предполагаться достаточно медленными, так что энергия деформации определяется первыми неисчезающими членами разложения по степеням пространственных производных. Кроме того, однако, будет предполагаться еще и более далеко идущее условие: сами смещения u предполагаются настолько малыми, что слои остаются везде почти параллельными одной и той же плоскости xy [2]).

В этих предположениях и с учетом симметрии среды свободная энергия деформации смектика дается следующим выражением:

$$F_d = F - F_0(T) =$$
$$= \frac{A}{2\rho_0}(\rho - \rho_0)^2 + C(\rho - \rho_0)\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{B\rho_0}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \frac{K_1}{2}(\Delta_\perp u)^2,$$
$$\Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (44.1)$$

Член вида [3]) $(\partial u/\partial z)\Delta_\perp u$ запрещается предполагаемой здесь эквивалентностью обоих направлений оси z, т. е. симметрией по отношению к преобразованию $u \to -u$, $z \to -z$, x, $y \to x$, y (отражение в плоскости xy) или $u \to -u$, $z \to -z$, $y \to -y$, $x \to x$ (поворот вокруг горизонтальной оси второго порядка — оси x); по этой же причине отсутствует член вида $(\rho - \rho_0)\Delta_\perp u$. Учет первого члена разложения по вторым производным (отсутствующий в теории упругости твердых тел) необходим ввиду отсутствия в F_d первых производных по x и y. Условия устойчивости недеформированного состояния, т. е. условия положительности энергии (44.1), гласят

$$A > 0, \quad B > 0, \quad AB > C^2. \quad (44.2)$$

[1]) В упругую энергию твердых тел эти производные входят в комбинациях u_{xz} и u_{yz} с производными от u_x и u_y; эти комбинации при указанном повороте не изменятся.

[2]) В этом смысле область применимости развиваемой здесь механики смектиков более узка, чем для рассмотренной выше механики нематиков, в которой допускались поля директора $\mathbf{n}(\mathbf{r})$, сколь угодно сильно отличающиеся от недеформированного однородного распределения.

[3]) Такой член фигурировал в V, § 137.

Обозначение коэффициента K_1 в (44.1), совпадающее с обозначением в (36.1), выбрано не случайно. Действительно, деформацию слоистой структуры смектиков можно описывать распределением директора $\mathbf{n}(\mathbf{r})$, понимая его как нормаль к деформированным слоям, задаваемым уравнениями $u(\mathbf{r}) = \text{const}$. При малом искажении слоев

$$n_x \approx \frac{\partial u}{\partial x}, \quad n_y \approx \frac{\partial u}{\partial y}, \quad n_z \approx 1, \tag{44.3}$$

и тогда $(\Delta_\perp u)^2 = (\operatorname{div}\mathbf{n})^2$, т. е. как раз та величина, которая фигурирует в соответствующем члене в (36.1). Коэффициенты же B и C в (44.1) характерны для специфической кристаллической природы смектиков, отличающих их от нематиков [1]).

Обратим внимание на то, что в приближении (44.3) $\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{n} \approx \operatorname{rot}_z\mathbf{n} = 0$. Поэтому член вида $\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{n}$ в свободной энергии (а тем самым и холестерическое искажение структуры — § 43) в смектиках отсутствует вне зависимости от наличия или отсутствия среди его элементов симметрии центра инверсии.

Уравнения равновесия смектика получаются минимизацией полной свободной энергии по переменным ρ и u при дополнительном условии $\int \rho\, dV = \text{const}$, выражающем сохранение полной массы тела. Минимизируя разность

$$\int F_d\, dV - \lambda \int \rho\, dV$$

(где λ — постоянный множитель Лагранжа) по ρ, получим равенство

$$\frac{A}{\rho_0}(\rho - \rho_0) + C\,\frac{\partial u}{\partial z} = \lambda,$$

связывающее изменение плотности с деформацией слоев. Полагая, что ρ_0 есть плотность при $\partial u/\partial z = 0$, имеем $\lambda = 0$, и тогда

$$\rho - \rho_0 = -\rho_0 m\frac{\partial u}{\partial z}, \quad m = \frac{C\rho_0}{A}. \tag{44.4}$$

---

[1]) Подчеркнем, что директор $\mathbf{n}$ (понимаемый как избранное направление ориентации молекул в слоях) не является в смектиках (смектиках A) независимой гидродинамической переменной. Для переменной $\mathbf{n}$ в гидродинамике нематиков характерно, что однородный поворот поля $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ во всем теле не связан с изменением энергии. Именно поэтому медленное изменение $\mathbf{n}$ вдоль тела связано лишь с малым изменением энергии, последняя зависит только от производных от $\mathbf{n}$ и может быть разложена по ним. В смектиках же всякий такой поворот меняет ориентацию относительно слоистой структуры и был бы связан со значительным изменением энергии. Отметим, что в смектиках C, где директор наклонен к нормали под некоторым определенным углом, однородный поворот направлений $\mathbf{n}$ вокруг нормалей с сохранением величины угла наклона снова не был бы связан с изменением энергии. Поэтому здесь снова появляется новая гидродинамическая переменная — проекция $\mathbf{n}$ на плоскость слоев.

Безразмерный коэффициент m связан с коэффициентом Пуассона σ для «стержня», вырезанного из смектика в направлении оси z. Действительно,

$$\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0} = -\frac{V-V_0}{V_0} = -(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})$$

(см. (1.6)), где $u_{zz} = \partial u/\partial z$, а u_{xx}, u_{yy} — компоненты тензора деформации в плоскости xy. Полагая $u_{xx} = u_{yy}$, имеем

$$u_{xx} = -\frac{1-m}{2}u_{zz}$$

и, сравнив с определением (5.4):

$$\sigma = \frac{1-m}{2}. \tag{44.5}$$

При $m = 0$ коэффициент σ принимает характерное для жидкости значение $\sigma = 1/2$.

Исключив из (44.1) изменение плотности с помощью (44.4), получим свободную энергию, выраженную только через u:

$$F_d = \frac{\rho_0 B'}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \frac{K_1}{2}(\Delta_\perp u)^2, \tag{44.6}$$

где

$$B' = B - \frac{C^2}{A}. \tag{44.7}$$

Варьируя полную свободную энергию по u, найдем теперь после нескольких интегрирований по частям:

$$\delta\int F_d\,dV = -\int F_z\,\delta u\,dV, \tag{44.8}$$

где

$$F_z = \rho_0 B'\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - K_1\Delta_\perp^2 u. \tag{44.9}$$

Очевидно, что F_z есть (отнесенная к единице объема) сила, действующая в направлении оси z в деформированном смектике при условии, что изменение плотности уже «подстроилось» под деформацию.

В равновесии $F_z = 0$, так что смещение u удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$\rho_0 B'\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - K_1\Delta_\perp^2 u = 0. \tag{44.10}$$

Если на тело действуют еще и приложенные к нему объемные внешние силы, то они должны быть добавлены к левой части уравнения (ср. (2.8)).

Отношение $(K_1/B'\rho_0)^{1/2}$ имеет размерность длины и грубая его оценка есть: $(K_1/B'\rho_0)^{1/2} \sim a$, где a — период одномерной

структуры (расстояние между слоями). Если смектик подвергнут деформации, существенно меняющейся в плоскости xy на расстояниях $\sim l_\perp \gg a$, то из (44.10) следует, что в направлении оси z деформация испытывает существенное изменение лишь на расстояниях $l_{||} \sim l_\perp^2/a \gg l_\perp$.

В качестве примера найдем гриновскую функцию уравнения (44.10), т. е. смещение $u = G_{zz}(\mathbf{r}) \equiv G(\mathbf{r})$ в переменной точке $\mathbf{r}$, вызванное единичной сосредоточенной силой, приложенной в точке $\mathbf{r} = 0$ и действующей в направлении оси z (ср. задачу к § 8). Эта функция удовлетворяет уравнению

$$\rho_0 B' \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} - K_1 \Delta_\perp^2 G + \delta(\mathbf{r}) = 0. \tag{44.11}$$

Совершая над этим уравнением преобразование Фурье (т. е. умножив его на $e^{-i\mathbf{kr}}$ и проинтегрировав по d^3x), находим для фурье-компонент функции $G(\mathbf{r})$ выражение

$$G_\mathbf{k} = [\rho_0 B' k_z^2 + K_1 k_\perp^4]^{-1},$$

где $k_\perp^2 = k_x^2 + k_y^2$. Обратное фурье-преобразование дает искомую функцию в виде интеграла

$$G(\mathbf{r}) = \int \frac{e^{i\mathbf{kr}}}{\rho_0 B' k_z^2 + K_1 k_\perp^4} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \tag{44.12}$$

Этот интеграл логарифмически расходится при $\mathbf{k} \to 0$. Для придания ему определенного смысла надо исключить перемещение тела как целого, предположив закрепленной некоторую условно выбранную его точку, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$; тогда в числителе подынтегрального выражения надо писать $e^{i\mathbf{kr}} - e^{i\mathbf{kr}_0}$ и расходимость устраняется.

Вернемся еще раз к вопросу о влиянии тепловых флуктуаций на свойства смектиков — на этот раз на их упругие свойства. Наиболее определенным образом вопрос может быть поставлен следующим образом: как меняется под влиянием флуктуаций деформация, создаваемая приложенной к телу сосредоточенной силой, т. е. как меняется гриновская функция $G(\mathbf{r})$? Оказывается, что это изменение сводится к замене в выражении (44.12) k_z^2 и $k_\perp^4$ соответственно на

$$k_z^2 \left(\ln \frac{1}{ak_z}\right)^{-4/5} \quad \text{и} \quad k_\perp^4 \left(\ln \frac{1}{ak_\perp}\right)^{2/5},$$

где a — величина порядка периода структуры [1]). В свою оче-

---

[1]) *Grinstein G., Pelcovits R.A.* // Phys. Rev. Lett. 1981. V. 47. P. 856; Phys. Rev. 1982. V. A26. P. 915; *Е.И. Кац* // ЖЭТФ. 1982. Т. 83. С. 1376. При исследовании необходимо учитывать также и члены третьего и четвертого порядков по u в разложении свободной энергии.

редь такое изменение можно наглядно интерпретировать как изменение эффективных значений упругих модулей B' и K_1 при уменьшении характерных значений волнового вектора деформации (т. е. увеличении ее характерной протяженности $\sim 1/k$). Мы видим, что эффективное значение $B'_{\text{эф}}$ убывает при $k_z \to 0$ как $[\ln(1/ak_z)]^{-4/5}$, а $K_{1\text{эф}}$ растет при $k_\perp \to 0$ как $[\ln(1/ak_\perp)]^{2/5}$. Фактически, однако, эти эффекты могли бы стать существенными лишь при практически нереальных огромных размерах.

Укажем в заключение этого параграфа, что выражение (44.6) для упругой энергии смектика можно несколько обобщить включением в него некоторых членов более высокого порядка, но без введения при этом дополнительных коэффициентов.

Для этого заметим, что вклад в энергию, описываемый первым членом в (44.6), физически связан с изменением расстояния a между слоями; производная $\partial u/\partial z$ совпадает с относительным изменением этого расстояния при смещении $u_z = u$, и потому этот член можно записать в виде $\frac{1}{2}\rho_0 B'(\delta a/a)^2$. Но расстояние между слоями может измениться не только из-за зависимости смещения u от координаты z, но и от его зависимости от x и y. Это легко понять, представив себе все слои одновременно повернутыми, скажем, вокруг оси y на угол θ таким образом, что величина периода структуры вдоль оси z остается равной a; расстояние же между слоями (измеренное по направлению нормалей к ним) оказывается при этом равным $a\cos\theta$. При малых углах θ изменение расстояния между слоями

$$\delta a = a(\cos\theta - 1) \approx -\frac{a\theta^2}{2}.$$

Поскольку в то же время смещение u при рассматриваемом повороте есть $u = \text{const} + x \operatorname{tg}\theta \approx \text{const} + x\theta$, то

$$\frac{\delta a}{a} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2.$$

В таком виде это выражение справедливо при любой зависимости u от x; если же u зависит также и от y, то вместо $(\partial u/\partial x)^2$ надо писать $(\nabla_\perp u)^2$.

Таким образом, с учетом описанного эффекта свободную энергию (44.6) надо писать в виде

$$F_d = \frac{\rho_0 B'}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]^2 + \frac{K_1}{2}(\Delta_\perp u)^2. \qquad (44.13)$$

Это выражение используется в задаче к этому параграфу.

Задача

Слой смектика (толщины h) с плоскими границами, параллельными плоскостям слоистой структуры, подвергнут однородному растяжению вдоль перпендикулярной ему оси z. Найти критическую величину растяжения, за которым слоистая структура смектика становится неустойчивой по отношению к поперечным возмущениям (*W. Helfrich*, 1971) [1]).

Решение. Однородное растяжение означает деформацию $u = \gamma z$, где постоянная $\gamma > 0$. Для исследования устойчивости полагаем $u = \gamma z + \delta u(x, z)$, где δu — малое возмущение, удовлетворяющее граничным условиям $\delta u = 0$ при $z = \pm h/2$ (плоскость xy выбрана посередине слоя). С точностью до членов второго порядка, полная упругая энергия возмущения (отнесенная к единице длины вдоль оси y):

$$\int \delta F_d\, dx\, dz = \frac{1}{2}\int\left\{B'\rho_0\left(\frac{\partial\delta u}{\partial z}\right)^2 - B'\rho_0\gamma\left(\frac{\partial\delta u}{\partial x}\right)^2 + K_1\left(\frac{\partial^2\delta u}{\partial x^2}\right)^2\right\} dx\, dz \tag{1}$$

(член с $\gamma\,\partial\delta u/\partial z$ выпадает при интегрировании по dz в силу граничных условий).

Будем рассматривать возмущения вида

$$\delta u = \mathrm{const}\cdot\cos k_z z\cdot\cos k_x x,\quad k_z = \pi n/h,\quad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

(поперечная модуляция слоистой структуры). Условие устойчивости структуры состоит в положительности энергии (1). Заменив все интегрируемые множители $\sin^2$, $\cos^2$ их средними значениями 1/2, получим это условие в виде

$$B'\rho_0(k_z^2 - \gamma k_x^2) + K_1 k_x^4 > 0.$$

Граница устойчивости (по мере увеличения γ) определяется появлением вещественного корня k_x^2 трехчлена в левой части этого неравенства (комплексные значения k_x не удовлетворяют условию конечности возмущения во всей плоскости xy). Первое такое появление происходит для возмущения с $n = 1$. Для него находим критическое растяжение и соответствующее значение $k_x = k_{\text{кр}}$ [2]):

$$\gamma_{\text{кр}} = \frac{2\pi}{h}\left(\frac{K_1}{\rho_0 B'}\right)^{1/2},\quad k_{\text{кр}} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\rho_0 B'}{K_1}\right)^{1/2}.$$

§ 45. Дислокации в смектиках

Понятие дислокации в смектике имеет тот же смысл, что и в обычном кристалле. Разница состоит лишь в том, что ввиду одномерной (вдоль оси z) периодичности микроскопической

---

[1]) Эта неустойчивость аналогична рассмотренной в § 21 неустойчивости сжимаемого прямого стержня.

[2]) Значение $k_{\text{кр}}$ определяет лишь абсолютную величину «волнового вектора» возмущения в плоскости xy, но не полную симметрию возникающей деформации. Определение последней требует выхода за границы приближения, отвечающего линейным (по δu) уравнениям равновесия (ситуация здесь аналогична той, которая имеет место для конвективной неустойчивости плоскопараллельного слоя жидкости — см. VI, § 57). См. *Delrieu J.M.* // Journ. Chem. Phys. 1974. V. 60. P. 1081.

структуры смектиков вектор Бюргерса дислокации в них всегда направлен по оси z, а по величине равен целому кратному от периода a структуры.

С учетом этого замечания для деформации вокруг дислокации в смектике остается справедливой полученная в § 27 формула (27.10) — при надлежащем определении тензора модулей упругости λ_{iklm}. Для этого введем тензор напряжений в смектике σ_{ik} в соответствии с обычным определением, т. е. по формуле

$$F_z = \partial_k \sigma_{zk}, \tag{45.1}$$

где F_z — объемная «сила внутренних напряжений» (44.9). Введем также тензор деформаций, отвечающий смещению $u_z = u$; отличные от нуля его компоненты:

$$u_{zz} = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad u_{xz} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{yz} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{45.2}$$

Сила (44.9) может быть представлена в виде (45.1), если выразить тензор напряжений через тензор деформации формулами $\sigma_{ik} = \lambda_{iklm}\sigma_{lm}$ [1]) с

$$\begin{gathered} \lambda_{zzzz} = \rho_0 B', \quad \lambda_{zxzx} = \lambda_{zyzy} = -K_1 \Delta_\perp, \\ \lambda_{zxzy} = \lambda_{zxzz} = \lambda_{zyzz} = 0; \end{gathered} \tag{45.3}$$

некоторые из этих компонент — операторы.

Формула (27.10) для смещения $u_z = u$ принимает вид

$$u(\mathbf{r}) = -\lambda_{zklz} b \int\limits_{S_D} n_l \frac{\partial}{\partial x_k} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\, df', \tag{45.4}$$

где $G \equiv G_{zz}$ — функция (44.12).

Рассмотрим два частных случая дислокаций — прямолинейные винтовую и краевую. В первом случае ось дислокации совпадает с направлением вектора Бюргерса, т. е. с осью z. Этот случай вообще не требует каких-либо новых вычислений. Заранее ясно, что деформация u будет зависеть только от координат x, y. Но в плоскости xy среда изотропна. Поэтому можно сразу воспользоваться результатом задачи 2, § 27, согласно которому

$$u = \frac{b\varphi}{2\pi}, \tag{45.5}$$

где φ — полярный угол радиус-вектора в плоскости xy.

---

[1]) Остальные компоненты λ_{iklm} можно выбрать так, чтобы было $F_x = F_y = 0$; в формулу (45.4) эти компоненты не входят.

Обратимся к более сложному случаю краевой дислокации (*P.G. de Gennes*, 1972). В этом случае ось дислокации перпендикулярна вектору Бюргерса; пусть она совпадает с осью y. Тогда в качестве поверхности S_D в интеграле (45.4) можно взять правую полуплоскость xy, а вектор $\mathbf{n}$ нормали к ней будет лежать вдоль отрицательного направления оси z. Из всех компонент вида λ_{zkzz} отлична от нуля только $\lambda_{zzzz} = B'\rho_0$, так что формула (45.4) принимает вид

$$u(\mathbf{r}) = bB'\rho_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\partial G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\partial z}\, dx'\, dy'.$$

Подставляем сюда функцию G из (44.12). Дифференцирование по z дает множитель ik_z, интегрирование по dy дает $2\pi\delta(k_y)$, δ-функция устраняется затем интегрированием по dk_y. В интеграле

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-ik_x x'}\, dx'$$

для обеспечения сходимости надо понимать k_x как $k_x - i0$. Таким образом, после выполнения интегрирований по $dx'\, dy'\, dk_y$ получаем

$$u(\mathbf{r}) = -b \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ik_x x)}{k_x - i0} I(k_x, z) \frac{dk_x}{2\pi},$$

где

$$I(k_x, z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{k_z \exp(ik_z z)}{k_z^2 + \lambda^2 k_x^4} \frac{dk_z}{2\pi}, \qquad \lambda^2 = \frac{K_1}{B'\rho_0}.$$

Последний интеграл вычисляется путем замыкания контура интегрирования бесконечно удаленной полуокружностью в верхней (при $z > 0$) или нижней (при $z < 0$) полуплоскости комплексной переменной k_z и взятия вычета в полюсе $k_z = i\lambda k_x^2$ или $k_z = -i\lambda k_x^2$:

$$I = \pm\frac{i}{2} \exp\left(-\lambda k_x^2 |z|\right),$$

где верхний или нижний знак относятся соответственно к $z > 0$ и $z < 0$. Таким образом, смещение

$$u(x, z) = \pm\frac{b}{4\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\lambda k_x^2 |z| + ik_x x\right\} \frac{dk_x}{k_x - i0}. \tag{45.6}$$

Более интересно, однако, не само смещение, а его производные по координатам. Для производной по x имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \pm\frac{b}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\lambda k_x^2|z| + ik_x x\right\}dk_x = \\ = \pm\frac{b}{4(\pi\lambda|z|)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4\lambda|z|}\right\}. \quad (45.7)$$

Согласно (45.6) производная по z связана с производными по x формулой

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \pm\lambda\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

откуда

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{bx}{8(\pi\lambda)^{1/2}|z|^{3/2}}\exp\left\{-\frac{x^2}{4\lambda|z|}\right\}. \quad (45.8)$$

Деформация быстро (экспоненциально) стремится к нулю при $|x|\to\infty$ и гораздо медленнее (по степенному закону) при $|z|\to\infty$.

§ 46. Уравнения движения смектиков

Механика смектиков имеет то общее с механикой нематиков, что в обоих случаях речь идет о гидродинамике с дополнительными (по сравнению с обычной жидкостью) переменными. В случае нематиков этой переменной является директор $\mathbf{n}$, а в случае смектиков — смещение u слоев (*P.C. Martin*, *O. Parodi*, *P.S. Pershan*, 1972). Последнее требует пояснения. Скорость определяется в гидродинамике как импульс единицы массы вещества. Ее компонента v_z отнюдь не обязана совпадать в данном случае с производной $\partial u/\partial t$. Перенос массы (в направлении оси z) может осуществляться в смектике не только за счет деформирования слоев, но и путем «просачивания» вещества сквозь остающуюся неподвижной одномерную структуру (подобно описанному в § 43 аналогичному эффекту в холестериках). Это явление не специфично для жидких кристаллов, аналогичное явление возможно и в твердых кристаллах, где оно связано с диффузией дефектов (см. примеч. на с. 130). Но в смектиках оно в принципе неустранимо ввиду бо́льшей «размытости» периодической структуры (как бы содержащей значительное число дефектов — вакансий) и бо́льшей подвижности молекул.

При адиабатическом движении каждый элемент жидкости переносит свое постоянное значение энтропии s (отнесенной к единице массы); если в какой-либо начальный момент времени энтропия s была постоянна по всему объему среды, она останется постоянной и в дальнейшем. Поскольку условие $s = \text{const}$ справедливо именно для энтропии единицы массы, будет удобным от-

носить сначала к единице массы также и внутреннюю энергию среды; обозначим ее через ε. Для деформированного смектика эта величина выражается формулой, аналогичной (44.1):

$$\varepsilon_d = \varepsilon - \varepsilon_0(s) = \frac{A}{2\rho_0^2}(\rho-\rho_0)^2 + \frac{C}{\rho_0}(\rho-\rho_0)\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{B}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \frac{K_1}{2\rho_0}(\Delta_\perp u)^2, \qquad (46.1)$$

где ρ_0 — плотность недеформированной среды; коэффициенты A, B, C здесь не совпадают с таковыми в (44.1) — они представляют собой теперь адиабатические значения модулей упругости (и предполагаются выраженными в функции от s), а не изотермические, как в (44.1); что касается коэффициента K_1, то его изотермическое и адиабатическое значения совпадают по тем же причинам, что и для нематиков (см. конец § 36) [1]).

Единица массы вещества занимает объем $1/\rho$. Поэтому термодинамическое соотношение для дифференциала энергии:

$$d\varepsilon = T\,ds - p\,dV = T\,ds + \frac{p}{\rho^2}d\rho.$$

Давление в среде можно, следовательно, найти дифференцированием выражения (46.1)

$$p = \rho^2\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_s \approx A(\rho-\rho_0) + \rho_0 C\,\frac{\partial u}{\partial z}. \qquad (46.2)$$

Дальнейшее построение уравнений движения смектиков очень близко по используемой последовательности операций произведенному в § 40 выводу уравнений движения нематиков. Для усиления этой аналогии снова (как и в § 40) будем пользоваться энергией $E = \rho\varepsilon$ и энтропией $S = \rho s$, отнесенными к единице объема.

Уравнение непрерывности имеет обычный вид [2])

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0. \qquad (46.3)$$

Динамическое уравнение для скорости должно иметь вид

$$\rho\frac{dv_i}{dt} = \partial_k\sigma_{ik} \qquad (46.4)$$

---

[1]) Строго говоря, в (46.1) надо было бы писать $\partial u/\partial z - \delta_0(s)$ вместо $\partial u/\partial z$, где $\delta_0(s)$ — значение $\partial u/\partial z$ в отсутствие внешних сил при энтропии s. Рассматривая движение при заданном s, мы можем выбрать в качестве недеформированного именно это состояние и положить $\delta_0(s) = 0$. Подчеркнем, однако, что после этого уже нельзя, например, дифференцировать выражение (46.1) по s с целью определения температуры по формуле $T = (\partial\varepsilon/\partial s)_\rho$!

[2]) Хотя мы интересуемся в конечном счете лишь линеаризованными уравнениями движения, мы не производим линеаризации на каждом этапе выводов, так как это усложнило бы запись формул.

(ср. (40.7)); вид тензора напряжений будет установлен ниже.

Еще одно уравнение связано с наличием дополнительной переменной и выражает собой отличие v_z от $\partial u/\partial t$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - v_z = N. \tag{46.5}$$

Величина N представляет собой скорость «просачивания» — скорость жидкости относительно одномерной решетки; она имеет кинетическую природу, и ее выражение будет установлено ниже.

Наконец, уравнение для энтропии, учитывающее диссипативные процессы в среде, имеет вид (40.8)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}\left(S\mathbf{v} + \frac{\mathbf{q}}{T}\right) = \frac{2R}{T}. \tag{46.6}$$

Как и в § 40, вычисляем производную по времени от полной энергии единицы объема среды, фигурирующую в уравнении закона сохранения энергии (40.11). Отличие возникает только в виде последнего члена в (40.12). Имеем теперь [1])

$$\left(\frac{\partial E_d}{\partial t}\right)_{\rho,\,S} = \left(\frac{\partial E_d}{\partial(\partial_z u)}\right)_{\rho,\,S} \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial t} + K_1(\Delta_\perp u)\left(\Delta_\perp \frac{\partial u}{\partial t}\right) = \\ = -h\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}\{\cdots\} \tag{46.7}$$

(как и в § 40, члены с полными дивергенциями не выписываем), где введено обозначение

$$h = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E_d}{\partial(\partial_z u)}\right)_{\rho,\,S} - K_1\Delta_\perp^2 u = \rho_0 B\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + C\,\frac{\partial(\rho-\rho_0)}{\partial z} - K_1\Delta_\perp^2 u. \tag{46.8}$$

Если рассматривать h как z-компоненту векторной величины $\mathbf{h} = \mathbf{n}h$ ($\mathbf{n}$ — единичный вектор вдоль оси z), то легко убедиться, что этот вектор может быть представлен в виде дивергенции

$$h_i = \partial_k \sigma_{ik}^{(r)}, \tag{46.9}$$

где симметричный тензор $\sigma_{ik}^{(r)}$ имеет следующие компоненты:

$$\begin{gathered} \sigma_{xx}^{(r)} = \sigma_{yy}^{(r)} = K_1\Delta_\perp \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \sigma_{zz}^{(r)} = \rho_0 B\,\frac{\partial u}{\partial z} + C(\rho-\rho_0), \\ \sigma_{xz}^{(r)} = -K_1\Delta_\perp \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_{yz}^{(r)} = -K_1\Delta_\perp \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \sigma_{xy}^{(r)} = 0. \end{gathered} \tag{46.10}$$

[1]) Здесь и ниже изменением модулей упругости вдоль среды пренебрегаем.

Подставив в (46.7) $\partial u/\partial t$ из уравнения (46.5) и снова выделив в одном из членов полную дивергенцию, пишем

$$\left(\frac{\partial E_d}{\partial t}\right)_{\rho,\,S} = -hN - v_i\,\partial_k\sigma_{ik}^{(r)} + \operatorname{div}\{\cdots\} = \\ = -hN + v_{ik}\sigma_{ik}^{(r)} + \operatorname{div}\{\cdots\}.$$

Это выражение отличается от (40.17) лишь смыслом обозначений h и N [1]). Поступая далее также, как это было объяснено в § 40, получим прежнее выражение (40.21) для диссипативной функции

$$2R = \sigma'_{ik}v_{ik} + Nh - \frac{\mathbf{q}}{T}\nabla T, \tag{46.11}$$

где σ'_{ik} — вязкая часть тензора напряжений:

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma_{ik}^{(r)} + \sigma'_{ik}. \tag{46.12}$$

Динамическое уравнение (46.4) с этим тензором напряжений принимает после линеаризации (опускаем член $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$) вид

$$\rho_0\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\partial_i p + h_i + \partial_k\sigma'_{ik}, \tag{46.13}$$

где вектор $\mathbf{h} = \mathbf{n}h$ определен выражением (46.8).

Вязкий тензор напряжений σ'_{ik}, тепловой поток $\mathbf{q}$ и скорость просачивания N («термодинамические потоки») обычным образом представляются выражениями, линейными по «термодинамическим силам» $-v_{ik}/T$, $T^{-2}\,\partial_i T$, $-h/T$, причем коэффициенты в этих выражениях связаны друг с другом соотношениями, следующими из принципа Онсагера. Не повторяя заново соответствующих рассуждений (ср. § 41, 43), напишем результат. При этом будем считать, что (как это обычно имеет место) смектик обладает центром инверсии (до сих пор это еще не предполагалось). Тогда вязкий тензор напряжений дается той же формулой (41.4), что и для нематиков, причем под $\mathbf{n}$ следует понимать направление оси z. Тепловой поток и скорость просачивания даются выражениями

$$q_z = -\varkappa_{\|}\frac{\partial T}{\partial z} + \mu h, \quad \mathbf{q}_\perp = -\varkappa_\perp\nabla_\perp T, \quad N = \lambda_p h - \frac{\mu}{T}\frac{\partial T}{\partial z}, \tag{46.14}$$

причем положительность диссипативной функции требует выполнения неравенств

$$\varkappa_{\|}, \varkappa_\perp, \lambda_p > 0, \quad \mu^2 < T\lambda_p\varkappa_{\|}. \tag{46.15}$$

[1]) А также отсутствием члена $v_i(\partial_i E)$. Такой член, однако, являлся бы в данном случае малой величиной третьего порядка, которой можно пренебречь по сравнению с величинами второго порядка.

Явление просачивания делает возможным существование в смектиках эффекта, подобного описанному в конце § 43 для холестериков. Если периодическая структура смектика каким-то способом закреплена в пространстве, возможно существование однородного стационарного течения вдоль оси z. Из (46.13) следует, что для такого течения $dp/dz = h$, а из (46.5) с N из (46.14):

$$v_z = -\lambda_p h = -\lambda_p \frac{dp}{dz}. \tag{46.16}$$

К сказанному выше о кинетических коэффициентах смектиков надо сделать важную оговорку. Уже упоминавшаяся в § 45 расходимость флуктуаций в смектиках в особенности сильно проявляется именно в кинетических явлениях, что может существенно изменить их характер [1]).

§ 47. Звук в смектиках

В обычных жидкостях (а также в нематических жидких кристаллах) существует лишь одна ветвь слабозатухающих звуковых колебаний — продольные звуковые волны. В твердых кристаллах и аморфных твердых телах существуют три звуковые (акустические) ветви линейного закона дисперсии колебаний (§ 22, 23). Одномерные кристаллы — смектики — и здесь занимают промежуточное положение: в них имеются две акустические ветви (*P.G. de Gennes*, 1969). Не интересуясь здесь коэффициентами затухания этих волн, и имея в виду лишь определение скоростей их распространения, пренебрежем в уравнениях движения всеми диссипативными членами. Полная система линеаризованных уравнений движения складывается из уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{47.1}$$

(здесь и ниже индекс у ρ_0 опускаем; ρ', p' — переменные части плотности и давления), уравнения (46.5), которое сводится к

$$v_z = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{47.2}$$

— просачивание отсутствует, и динамического уравнения (46.13):

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p' + \mathbf{n} h, \tag{47.3}$$

причем, согласно (46.2),

$$p' = A\rho' + \rho C \frac{\partial u}{\partial z}. \tag{47.4}$$

[1]) См. *Кац Е.И., Лебедев В.В.* // ЖЭТФ. 1983. Т. 85. С. 2019.

В выражении (46.8) для h следует опустить член $K_1\Delta_\perp^2 u$, содержащий производные высших порядков, — он оказался бы слишком высокого порядка по волновому вектору k, который для звуковых волн следует рассматривать как малую величину:

$$h = \rho B\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + C\,\frac{\partial \rho'}{\partial z}. \tag{47.5}$$

В реальных смектиках величины B и C обычно малы по сравнению с A. В этих условиях, которые мы и будем предполагать, природа обеих акустических ветвей в смектиках становится более наглядной.

Если пренебречь в уравнениях движения всеми членами, содержащими малые коэффициенты B и C, то они сведутся к уравнениям движения обычной жидкости с уравнением состояния $p' = A\rho'$, т. е. с сжимаемостью $(\partial p'/\partial \rho')_s = A$. Соответствующие этому случаю колебания представляют собой обычные звуковые волны — продольные волны сжатия и расширения среды. Скорость их распространения

$$c_1 = A^{1/2} \tag{47.6}$$

и (в рассматриваемом приближении) не зависит от направления.

Фазовая скорость c_2 волн второй акустической ветви, как мы увидим, мала по сравнению с c_1: $\omega/k = c_2 \ll c_1$. Поэтому по отношению к этим колебаниям среду можно считать несжимаемой (ср. примеч. на с. 231). Уравнение непрерывности сводится при этом к условию несжимаемости $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$; в (47.5) опускаем второй член, так что уравнение (47.3) принимает вид

$$\rho\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p' + \mathbf{n}\rho B\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{47.7}$$

Продифференцировав z-компоненту этого уравнения по z и подставив в него $v_z = \partial u/\partial t$, получим

$$\rho\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} + \rho B\,\frac{\partial^2 \delta}{\partial z^2},$$

где $\delta = \partial u/\partial z$. Применив же к уравнению (47.7) операцию div, в силу условия несжимаемости получим

$$\Delta p' = \rho B\,\frac{\partial^2 \delta}{\partial z^2}.$$

Наконец, исключив из этих двух уравнений p', получим одно уравнение для величины δ:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta\delta = B\left\{-\frac{\partial^4 \delta}{\partial z^4} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Delta\delta\right\}. \tag{47.8}$$

Зависимость смещения u от координаты z означает, что меняются расстояния a между соседними слоями: $\delta a = (\partial u/\partial z)a$, сама же величина $\delta = \partial u/\partial z$ дает относительное изменение этого расстояния. Таким образом, уравнение (47.8) описывает распространение поперечной ($\mathbf{kv} = 0$) волны, в которой испытывают колебания расстояния между слоями при постоянной плотности. Для плоской волны, в которой $\delta \backsim \exp\{i\mathbf{kr} - i\omega t\}$, из (47.8) имеем

$$\omega^2 k^2 = Bk_\perp^2 k_z^2,$$

откуда находим скорость

$$c_2 = B^{1/2}\sin\theta\cos\theta, \qquad (47.9)$$

где θ — угол между $\mathbf{k}$ и осью z. Эта скорость анизотропна, причем обращается в нуль для распространения как вдоль оси z ($\theta = 0$), так и в плоскости xy ($\theta = \pi/2$). При углах, близких к этим значениям, возрастает роль диссипативных эффектов. (См. задачи 2 и 3 к этому параграфу.)

Задачи

1. Найти фазовые скорости акустических волн в смектиках при произвольном соотношении между модулями A, B, C.

Решение. Продифференцировав уравнение (47.3) по t и исключив производные $\partial\rho'/\partial t$ и $\partial u/\partial t$ с помощью (47.1), (47.2), получим уравнение

$$\frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial t^2} = A\nabla\operatorname{div}\mathbf{v} - C\nabla\frac{\partial v_z}{\partial z} + \mathbf{n}\left[-C\frac{\partial}{\partial z}\operatorname{div}\mathbf{v} + B\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right].$$

Для плоской волны, в которой $\mathbf{v} \backsim \exp(i\mathbf{kr} - i\omega t)$, это уравнение сводится к соотношению

$$-\omega^2\mathbf{v} = -A\mathbf{k}(\mathbf{kv}) + C\mathbf{k}k_z v_z + \mathbf{n}[Ck_z(\mathbf{kv}) - Bk_z^2 v_z]. \qquad (1)$$

Пусть волновой вектор $\mathbf{k}$ расположен в плоскости xz. Тогда из (1) следует, что и скорость $\mathbf{v}$ находится в той же плоскости, а x- и z-компоненты дают систему двух уравнений

$$v_z[c^2 - (A + B - 2C)\cos^2\theta] + v_x(C - A)\sin\theta\cos\theta = 0,$$

$$v_z(C - A)\sin\theta\cos\theta + v_x[c^2 - A\sin^2\theta] = 0,$$

где $c = \omega/k$ — скорость волны, а θ — угол между $\mathbf{k}$ и осью z. Приравняв нулю определитель этой системы, получим дисперсионное уравнение

$$c^4 - c^2[A + (B - 2C)\cos^2\theta] + (AB - C^2)\sin^2\theta\cos^2\theta = 0.$$

Бо́льший и меньший корни этого квадратного (по c^2) уравнения определяют скорости c_1 и c_2. В частности

$$c_1 = \begin{cases} A^{1/2} & \text{при} \quad \theta = \pi/2, \\ (A + B - 2C)^{1/2} & \text{при} \quad \theta = 0. \end{cases}$$

Скорость же c_2 в этих направлениях обращается в нуль.

2. С учетом диссипации определить закон дисперсии второй акустической ветви при распространении в плоскости слоев ($\nu = \pi/2$).

Решение. В условиях задачи скорость $\mathbf{v}$ направлена по оси z, а все величины зависят от x. Проецируя уравнение (46.13) на ось z, получаем

$$-i\omega\rho v = -K_1 k^4 u + ik\sigma'_{zx}. \tag{2}$$

С помощью (41.7) находим

$$\sigma'_{zx} = \frac{ik\eta_3}{2} v.$$

Легко проверить, что ввиду малости параметра $K_1\rho/\eta_3^2$ (ср. с (42.7)) можно пренебречь левой частью (2), а эффекты просачивания при малых k несущественны, так что $v = -i\omega u$. Окончательно получаем закон дисперсии:

$$i\omega = \frac{2K_1}{\eta_3} k^2.$$

3. То же для распространения перпендикулярно плоскости слоев ($\vartheta = 0$).

Решение. Условие несжимаемости приводит в этом случае к тому, что $\mathbf{v} = 0$ и движение смектика происходит только путем просачивания. Из (46.5) и (46.14) имеем тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda_p \rho B \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

или

$$i\omega = \lambda_p \rho B k^2.$$

Мы пренебрегли в (46.14) членом с градиентом температуры. Это возможно, если температура релаксирует быстрее, чем смещение u, т. е. если $\chi_{\|} \gg \lambda_p \rho B$. В этом случае, однако, нужно понимать под B изотермический модуль упругости.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ [1]

---

[1] Этот указатель дополняет оглавление книги, не повторяя его. В указатель включены термины и понятия, непосредственно не отраженные в оглавлении.

Учебное издание

ЛАНДАУ Лев Давидович
ЛИФШИЦ Евгений Михайлович

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

(Серия: «Теоретическая физика», том VII)

Редактор: *Д. А. Миртова*
Оригинал-макет: *Ст. Ю. Мельников*

ЛР №071930 от 06.07.99
Подписано в печать 10.07.01. Формат $60\times90^1/_{16}$
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная
Усл. печ. л. 16,5. Уч.-изд. л. 15,3. Заказ №

Издательская фирма
«Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117864 Москва, Профсоюзная ул., 90

Отпечатано с готовых диапозитивов в ПФ «Полиграфист».
160001, г. Вологда, ул. Челюскинцев, 3.
Тел.: (8172) 72-55-31, 72-61-75, факс (8172) 72-60-72.
E-mail: form.pfp@votel.ru http://www.vologda/~pfpv

ISBN 5-9221-0122-6

9 785922 101226